ネットワークの信頼性のはなし [安全工学]

静岡大学システム工学科
安藤 和敏

2002 年 7 月 {11,18} 日

1. はじめに

コンピュータ・ネットワーク, 電力の供給網 (ネットワーク), ガス供給網, 電話回線網, 道路交通網, 等々, この世の中には物理的なネットワーク (網) が数多く存在している. これらのネットワークは, ある地点から別の地点まで, モノ (情報, 電力, ガス, 車両など) を送り届けるという目的のために存在している.

これらのネットワークにおいては, 災害や機械の故障などによる原因によってネットワークのいくつかの構成要素 (ケーブル, 中継器) が機能しなくなった場合に, ネットワーク全体としては, その目的を果たすことができなくなる場合がある. 例えば, 図 1.1 のようなコンピュータ・ネットワークを考えてみよう. このネットワークにおいて, 例えば左下のハブが故障した場合に左上のサーバーから右上のサーバー (広域ネットワークへの出入口) への経路が途絶えてしまう. 左上のサーバーと右下のハブを結ぶケーブルが断線した場合にも, 同様の障害が生じる.

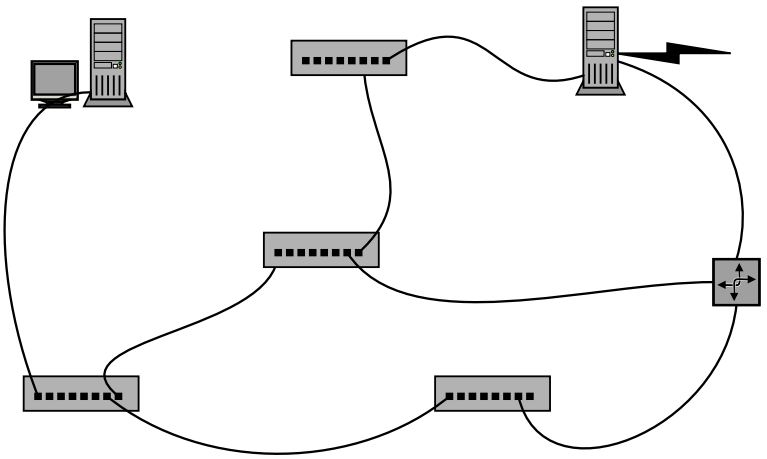

図 1.1: コンピュータ・ネットワークの例

しかし, 図 1.2 で示されるようなネットワーク構成であれば, そのようなことはないので, 図 1.2 のネットワークの方が信頼性が高いと言えるであろう.

本稿においては, グラフと呼ばれる数学的な対象を用いて, ネットワークの信頼性を評価し, さらに, 信頼性が要求される水準に満たない場合は信頼性を高めるためには, どうしたら良いのかを考察する.

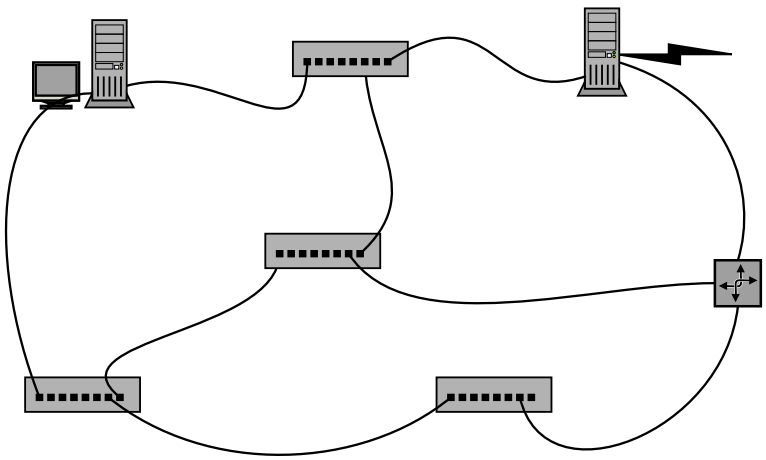

図 1.2: コンピュータ・ネットワークの例

2. グラフとは?

次の図 2.3 は, 図 1.2 のハブやルータなどを $a, b, ...$ などとラベルを付けた点で表して, 書き直したものである. このように, グラフとは, いくつかの頂点 (ノードとも呼ばれる) とそれらの頂点同士を結ぶいくつかの枝からなる図形のことをいう.

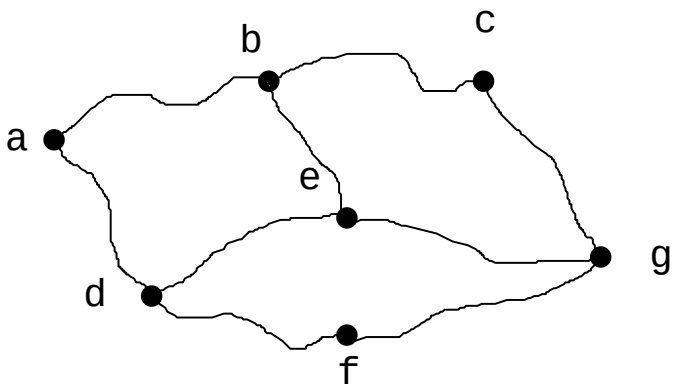

図 2.3: グラフの例

もう少し, まじめに定義してみよう. グラフとは, 頂点の集合 V と枝集合 E の対 $G = (V, E)$ のことをいう. ここで, E の各要素は V の 2 元からなる集合である.

例 **2.1**: 例えば, 図 *2.3* のグラフは,

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g\},\ E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{d, e\}, \{f, g\}, \{e, g\}, \{c, g\}\} \tag{2.1}$$

の対として与えられる. □

したがって, 実はこのようにグラフが与えられたら, その描き方は一意ではないという事に注意しよう. 例えば, 図 2 の (a) と (b) は, 両方とも式 (2.1) で与えられるグラフを描いたものである. グラフ $G = (V, E)$

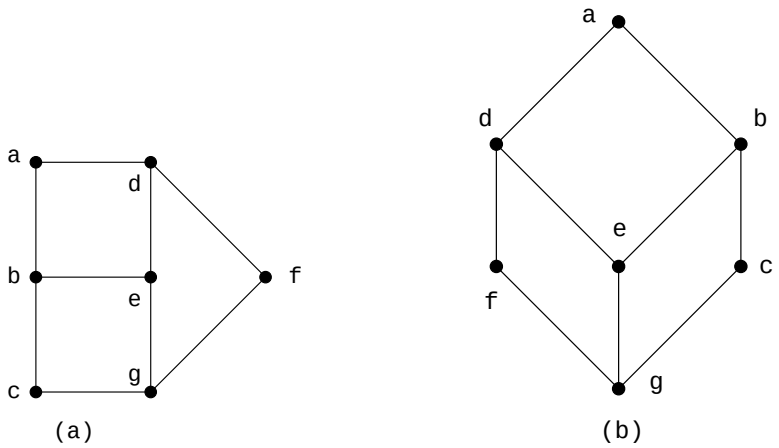

図 2.4: 式 (2.1) で与えられるグラフの異なる描き方

に対して, 枝の列

$$\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \cdots, \{v_{k-1}, v_k\}$$

を G 上の道 (あるいは, パス (英語で path)) と呼ぶ. これを, v_0 から, v_k への道ともいう.

例えば, 図 2.3 のグラフにおいて,

$$\{a, d\}, \{d, f\}, \{f, g\}$$

は, a から g への道であるし,

$$\{a, b\}, \{b, e\}, \{e, d\}, \{d, f\}$$

は, a から f への道である.

グラフ $G = (V, E)$ は, 任意の 2 頂点 v, w に対して v から w への道が存在するときに, 連結であると呼ばれる. 例えば, 図 2.3 のグラフは連結である.

3. 枝連結性と枝連結度

図 2.3 のグラフは連結であると同時に,

$$\text{そのグラフから任意の } 1 \text{ 本の枝を除去しても, まだ連結である} \tag{3.1}$$

という性質を持っていることは既に見た. 性質 (3.1) を満足するグラフのことを 2-枝連結グラフと呼ぶ.

これは, このグラフが最初のコンピュータ・ネットワークを単純化したものであるということを思い出せば,「どのケーブルが断線したとしても, 任意の 2 頂点間の通信が可能である」ということを意味する.

より一般的に $k \geq 1$ に対して,

$$\text{そのグラフから任意の } k-1 \text{ 本の枝を除去しても, まだ連結である} \tag{3.2}$$

という性質を考えることができて, この性質 3.2 を満足するグラフのことを k-枝連結と呼ぶ. (コンピュータ・ネットワークでは, 2 本以上のケーブルが同時に断線してしまうということは考えにくいが, 電力供給網では災害時にはそういうことも起り得るであろう.)

グラフ $G = (V, E)$ に対して,

$$\lambda(G) = \max\{k \mid \ k \geq 1, G \text{ は } k\text{-枝連結 }\} \tag{3.3}$$

で定義される $\lambda(G)$ を G の枝連結度と呼ぶ.

例 **3.1**: 図 *2.3* のグラフの連結度は, 2 である. □

グラフを最初に考えた物理的なネットワークのモデルとして考えると, 枝連結度はその物理的ネットワークの故障に対する信頼性を表す一つの尺度であると考えられる.

4. カット

$G = (V, E)$ の連結度 $\lambda(G)$ が k と等しいとすると, G は k-枝連結であるが, $k+1$-枝連結ではない. 即ち, ある k 本の枝を除去すると G は連結ではなくなる. このように, それらを除去することによってグラフが連結ではなくなるような枝の部分集合はカットセットと呼ばれる. グラフ G の連結度 $\lambda(G)$ は, カットセットの概念を用いて以下のように表現し直すことができる.

$$\lambda(G) = \min\{|K| \mid K \text{ は, } G \text{ のカットセット }\}. \tag{4.1}$$

頂点部分集合 $W \subseteq V$ に対して, $E(W) \subseteq E$ を

$$E(W) = \{\{v, w\} \in E \mid v \in W, w \notin W\}$$

で定義する. 即ち, $E(W)$ は W の中の頂点と W の外の頂点を結ぶ枝の集合である.

例 **4.1**: 図 *2.3* のグラフにおいて, $W = \{a, d\}$ としたときに,

$$E(W) = \{\{a, b\}, \{d, e\}, \{d, f\}\}.$$

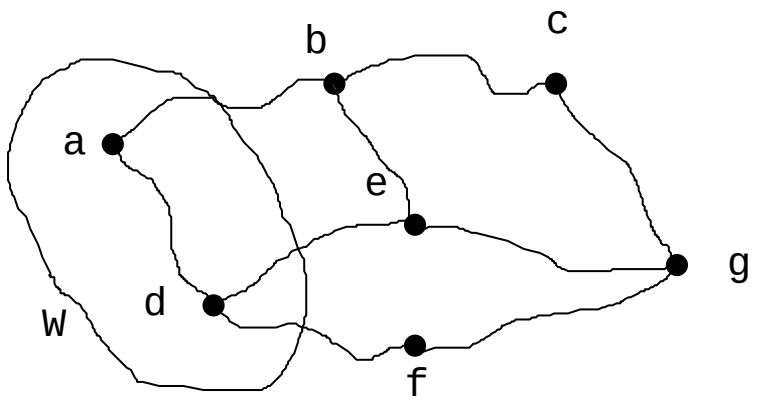

図 4.5: $E(W)$

$W \neq \emptyset, V$ であれば, $E(W)$ はカットセットになるということは明らかである. また逆に, $F \subseteq E$ がカットセットであるのならば, ある $W \neq \emptyset, V$ に対して, $E(W) \subseteq F$ となることを見るのは易しい. したがって, 式 (4.1) の右辺の最小値は, $E(W)$ $(W \neq \emptyset, V)$ という形をしたカットセットによって達成される. したがって, 式 (4.1) はさらに以下のように書きかえることができる.

$$\lambda(G) = \min\{|E(W)| \mid \emptyset \neq W \neq V\} \tag{4.2}$$

5. 2 点間の枝連結性

式 (4.2) の右辺の最小値をどのように計算すれば良いであろうか？グラフの頂点の数が n であるとしたら, $W \neq \emptyset, V$ であるような W の数は $2^n - 2$ 個ある. 下の表は, いくつかの n に対して $2^n - 2$ の値を計算したものである.

n	$2^n - 2$
10	1022
20	1048574
30	1073741822
40	1099511627774
100	1267650600228229401496703205374
200	1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301374

この表から分かることは, n が比較的小さくても 2^n は天文学的な数字になってしまうということである[1]. 手計算でやるのは無理であるし, コンピュータで計算するにしても $n = 100$ くらいが限界であろう.

幸いにも, $\lambda(G)$ をうまく計算する方法がある[2].

グラフ $G = (V, E)$ の 2 頂点 $s, t \in V$ に対して,

$$\lambda_{s,t}(G) = \min\{|E(W)| \mid s \in W, t \notin W\}$$

という量を考えると, 式 (4.2) は,

$$\lambda(G) = \min_{s \neq t} \lambda_{s,t}(G) \tag{5.1}$$

と書くことができる. これは, 全ての $s, t \in V$ について $\lambda_{s,t}(G)$ を計算すれば, $\lambda(G)$ が計算できることを意味する.

$G = (V, E)$ に対して, G 上の s から t への k 本の道 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ は, もしどの相異なる 2 本の道 P_i, P_j も枝を共有しないとき, 枝素であると呼ばれる (図 6.8 を見よ).

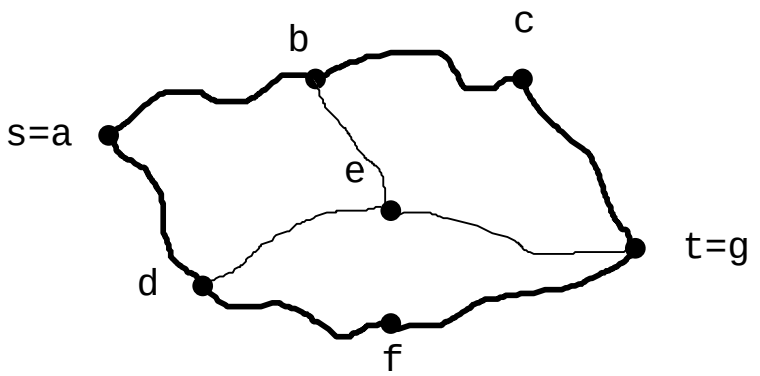

図 5.6: 枝素な $k = 2$ 本の道 (太線の部分)

[1] 組合せ論的爆発 (combinatorial explosion) と呼ばれている.

[2] これは, 行列式の定義式

$$\det(A) = \sum_{\pi} a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\pi(n)}$$

の右辺の項の数が $n!$ 個あるのに, 掃き出し法と呼ばれる計算を使えば簡単に計算できることに似ている.

定理 5.1 (Menger の定理 (枝バージョン)): グラフ $G = (V, E)$ と, G の 2 頂点 $s \neq t$ に対して, $\lambda_{s,t}(G)$ は, s から t への枝素な道の最大本数に等しい. □

定理 5.1 によって, $\lambda_{s,t}(G)$ を計算するためには, s から t への枝素な道の最大本数を求めれば良いことになった. s から t への枝素な道の最大本数の計算方法は, 第 8 で示す.

6. 点連結性と点連結度

これまでは, グラフから何本枝を除去しても連結性が保たれるかということを考えてきた. これは, ネットワークの信頼性の文脈においては, ケーブルが何本断線してもネットワークとしての機能を果せるかということに対応する. 今度は, ネットワークの中継点 (ハブやルータなど) が何個故障しても残ったネットワークは機能するかということを考える. グラフ理論の言葉でこのことを述べ直すと, グラフから何個頂点を除去しても残ったグラフが連結であり得るかということである.

グラフ $G = (V, E)$ と頂点部分集合 $W \subseteq V$ に対して, G から W を除去したグラフとは, G から W と W の中の頂点につながっている全ての枝を取り除いたグラフである. G から W を除去したグラフを $G \setminus W$ と表す (図 6.7 を見よ).

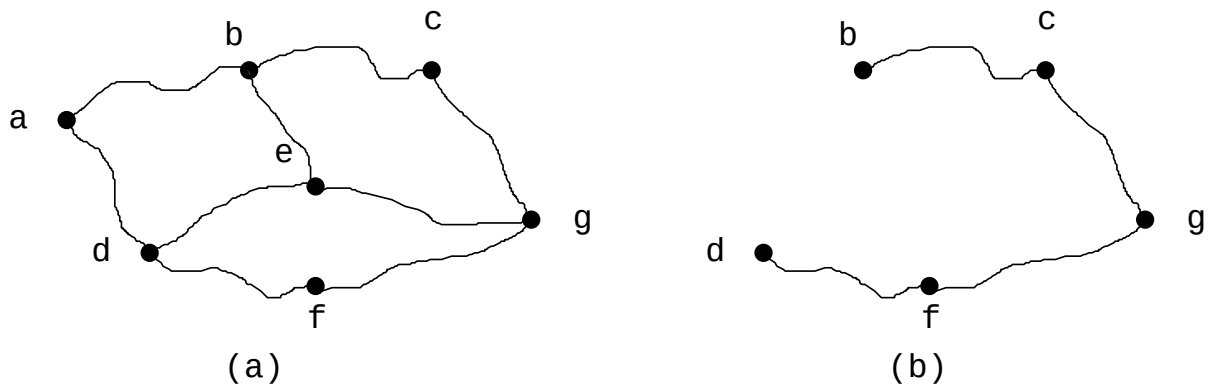

図 6.7: (a) G と (b) $G \setminus \{a, e\}$

グラフ $G = (V, E)$ が k-連結であるとは, 大きさが $k - 1$ であるような任意の頂点部分集合 W に対して $G \setminus W$ が連結であることをいう.

例 6.1: 図 *6.7(a)* のグラフは, 3-連結であるが, 4-連結ではない. □

グラフ $G = (V, E)$ の連結度とは,

$$\kappa(G) = \max\{k \geq 1 \mid G \text{ は, } k\text{-連結 }\} \tag{6.1}$$

で定義される自然数 $\kappa(G)$ である.

枝連結度のときと同じように, 連結度は以下のように書き換えることができる.

$$\kappa(G) = \begin{cases} |V| - 1 & \text{if } G \text{ が完全グラフ,} \\ \min\{|W| \mid W \subseteq V, G \setminus W \text{ は非連結 }\} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{6.2}$$

ここで, 完全グラフとは任意の相異なる 2 頂点間が枝で結ばれているようなグラフのことである.

例 **6.2**: 図 *6.7(a)* のグラフの連結度は, 3 である. □

さらに, 枝連結度のときのようにグラフ $G=(V,E)$ の相異なる 2 頂点 s,t で, $\{s,t\}$ が G の枝でないものに対して, $\kappa_{s,t}(G)$ を

$$\kappa_{s,t}(G)=\min\{|W|\,|\,W\subseteq V\setminus\{s,t\}, G\setminus W \text{ には } s \text{ から } t \text{ への道が存在しない }\} \tag{6.3}$$

と定義すると,

$$\kappa(G)=\min\{\kappa_{s,t}(G)\,|\,s,t\in V, s\neq t, \{s,t\}\notin E\} \tag{6.4}$$

となる.

$G=(V,E)$ に対して, G 上の s から t への k 本の道 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ は, もしどの相異なる 2 本の道 P_i,P_j も (s と t 以外の) 頂点を共有しないとき, 点素であると呼ばれる (図 6.8 を見よ).

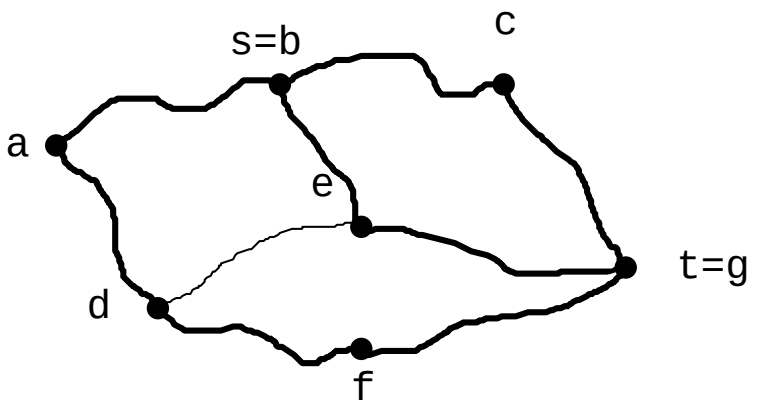

図 6.8: 点素な $k=3$ 本の $s=b$ から $t=g$ への道 (太線の部分)

定理 **6.3** (Menger の定理 (頂点バージョン)): グラフ $G=(V,E)$ と, G の 2 頂点 $s\neq t$ に対して, $\kappa_{s,t}(G)$ は, s から t への点素な道の最大本数に等しい. □

この定理を用いて $\kappa_{s,t}(G)$ を計算する方法は, 第 9 節で示す.

7. 有向グラフとフロー

図 7.9 形式的には, 有向グラフとは頂点集合 V と枝集合 $A\subseteq V\times V$ の対 $G=(V,A)$ の事である.

例 **7.1**: 図 *7.9* のグラフは,

$$V=\{a,b,c,d,e,f,g\},\ A=\{(a,b),(a,d),(b,c),(b,e),(d,e),(f,g),(e,g),(c,g)\} \tag{7.1}$$

の対 $G=(V,A)$ である. □

$G=(V,A)$ を有向グラフとし, s と t を G の相異なる 2 頂点とする. さらに, 各枝 $(v,w)\in A$ に対して容量と呼ばれる正の実数 $u(v,w)$ が与えられているとする.

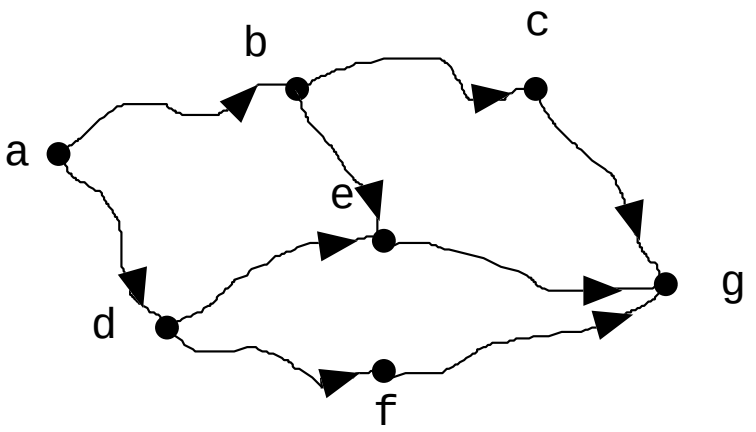

図 7.9: 有向グラフ

このときに, $f\colon A \to \mathbb{R}$ は,

$$\sum_{(v,w)\in A} f(v,w) - \sum_{(u,v)\in A} f(u,v) = 0 \quad (v \in V - \{s,t\}), \tag{7.2}$$

$$0 \le f(v,w) \le u(v,w) \quad ((v,w) \in A) \tag{7.3}$$

を満足するとき, G 上のフローと呼ばれる. フロー f に対して,

$$\sum_{(s,v)\in A} f(s,v) - \sum_{(v,s)\in A} f(v,s)$$

を f の流量と呼んで $\mathrm{val}(f)$ と書く.

例 **7.2**: 図 *7.9* のグラフで, $s = a$, $t = g$ としてさらに, 各枝の容量を適当に与えたものを, 図 *7.10(a)* に示す. 図 *7.10(b)* は, 一つのフローである. このときのフローの流量は 5 である. □

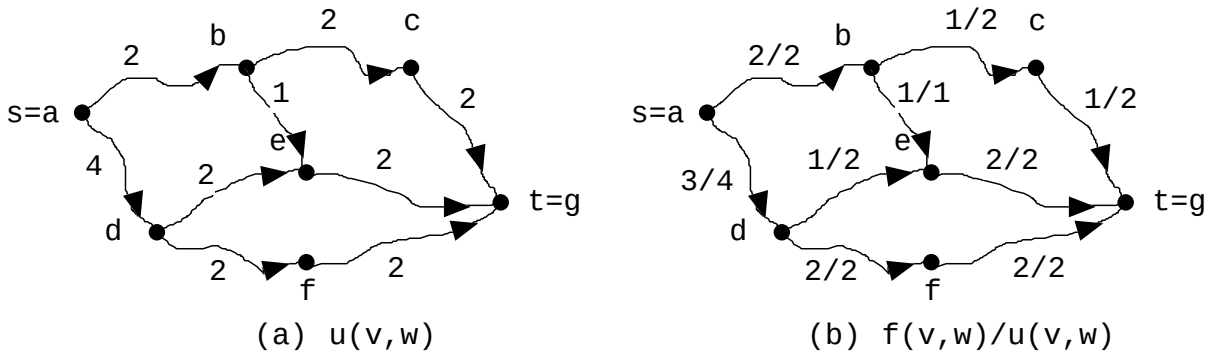

図 7.10: 容量付き有向グラフとフロー

最大流問題とは, 最大の流量を持つフローを求める問題である. 最大流問題は以下アルゴリズムを用いて解くことができる.

1: $f(v,w) \leftarrow 0$ $((v,w) \in A)$.
2: 残余グラフ G_f を作る.
3: **for** G_f 上に s から t までの有向道 P が存在する **do**
4: $\quad \Delta \leftarrow \min\{u_f(v,w) \mid (v,w) \in P\}$.
5: $\quad$ **for** P の各枝 (v,w) について **do**
6: $\quad\quad$ **if** (v,w) が G の枝 **then**
7: $\quad\quad\quad f(v,w) \leftarrow f(v,w) + \Delta$.
8: $\quad\quad$ **else**
9: $\quad\quad\quad f(v,w) \leftarrow f(v,w) - \Delta$.
10: $\quad\quad$ **end if**
11: $\quad$ **end for**
12: **end for**

図 7.11: 最大流問題を解くためのアルゴリズム

フロー f が与えられたときに, f の残余グラフ $G_f = (V, A_f)$ とは, 以下のように定義される.

$$A_f = \{(v,w) \mid (v,w) \in A, f(v,w) < u(v,w)\} \cup \{(w,v) \mid (v,w) \in A, 0 < f(v,w)\}.$$

さらに, 残余グラフの各枝 $(v,w) \in A_f$ に対して, 容量 $u_f(v,w)$ を

$$u_f(v,w) = \begin{cases} u(v,w) - f(v,w) & \text{if } (v,w) \in A, \\ f(w,v) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

例 **7.3**: 図 *7.12* と図 *7.13* にアルゴリズムが動作する様子を示す. 最大流の流量は 6 である. □

8. $\lambda_{s,t}(G)$ の計算

グラフ $G = (V,E)$ と, $s,t \in V$ が与えられたとき, 以下のように有向グラフ $D = (V,A)$ を構成する.

$$A = \{(v,w), (w,v) \mid \{v,w\} \in E\}.$$

さらに, D の各枝 (v,w) の容量 $u(v,w)$ を全て 1 とする.

このように定義された有向グラフ $D = (V,A)$ と u に対して最大流問題を解けば最大流の流量は, s から t への枝素な道の最大の数になっている. Menger の定理 (定理 5.1) によって, この数は $\lambda_{s,t}(G)$ と等しい.

9. $\kappa_{s,t}(G)$ の計算

グラフ $G = (V,E)$ と, $s,t \in V$ が与えられたとき, 以下のように有向グラフ $D = (V,A)$ を構成する.

$$A = \{(v,w), (w,v) \mid \{v,w\} \in E\}.$$

ここまではさっきと同じ. 次に, D から有向グラフ $D' = (V', A')$ を以下のように定義する.

$$V' = \{v' \mid v \in V - \{s,t\}\} \cup \{v'' \mid v \in V - \{s,t\}\} \cup \{s,t\},$$

$$A' = \{(v', v'') \mid v \in V - \{s,t\}\} \cup \{(v'', w') \mid (v,w) \in A, w \neq s,t\} \cup \{(s,w') \mid (s,w) \in A\} \cup \{(v'',t) \mid (v,t) \in A\}.$$

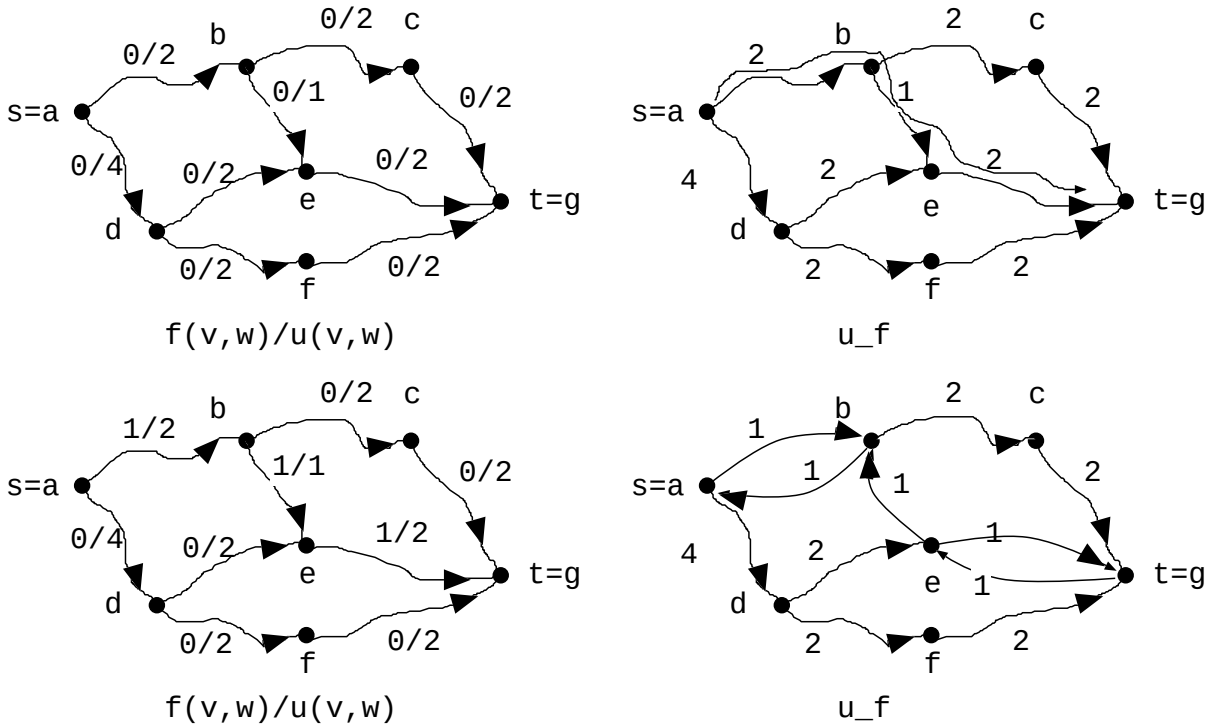

図 7.12: 最大流問題を解くアルゴリズム

そして, D' の全ての枝の容量 u を 1 とする.

このように定義された有向グラフ $D' = (V', A')$ と u に対して最大流問題を解けば最大流の流量は, s から t への点素な道の最大の数になっている. Menger の定理 (定理 6.3) によって, この数は $\kappa_{s,t}(G)$ と等しい.

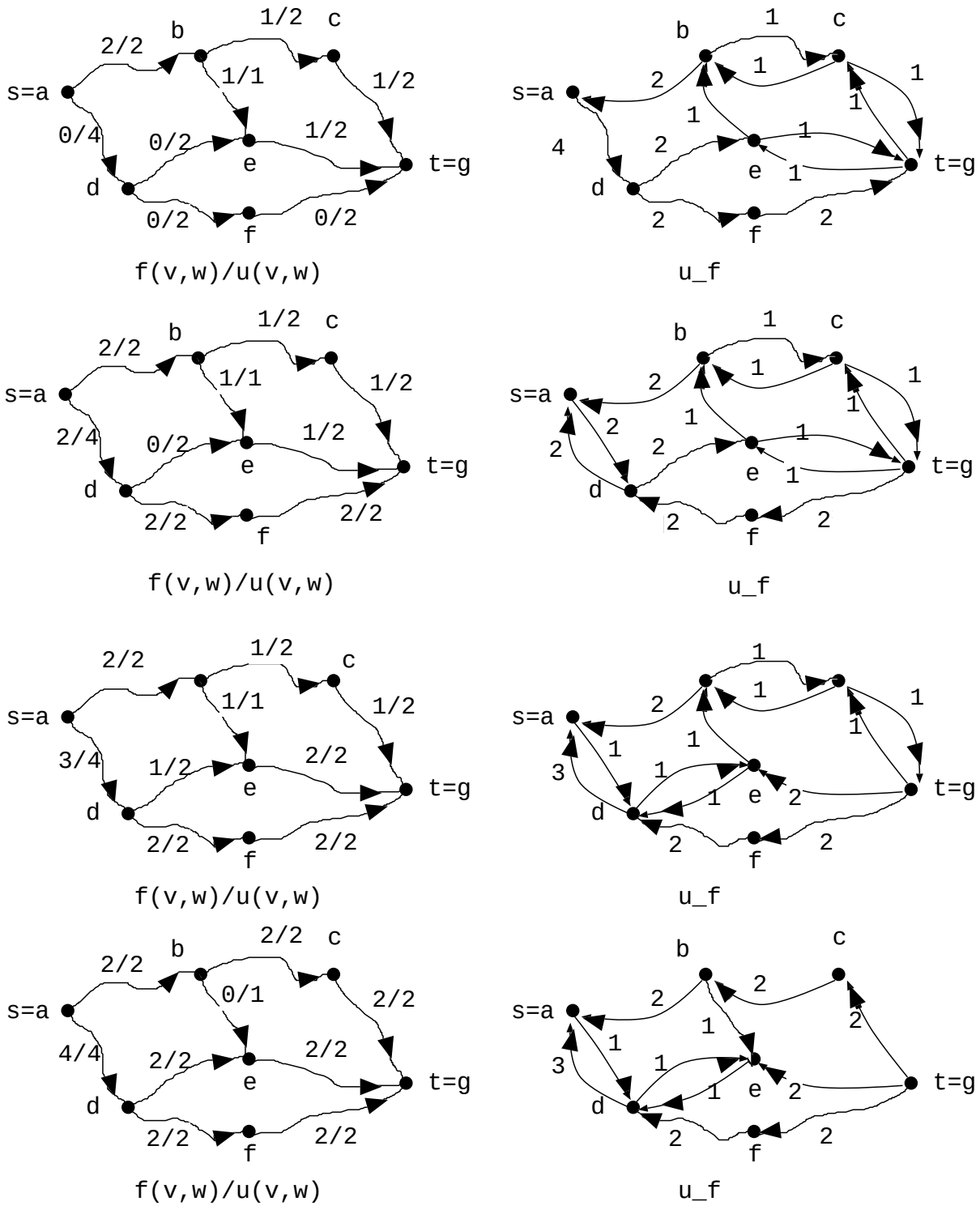

図 7.13: 最大流問題を解くアルゴリズム (続き)

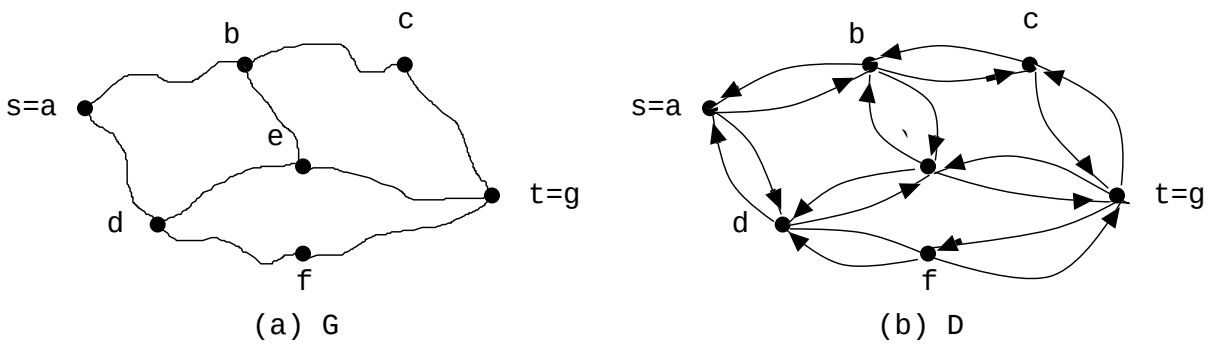

図 8.14: (a) 与えられた無向グラフ G; (b) G から構成される有向グラフ D

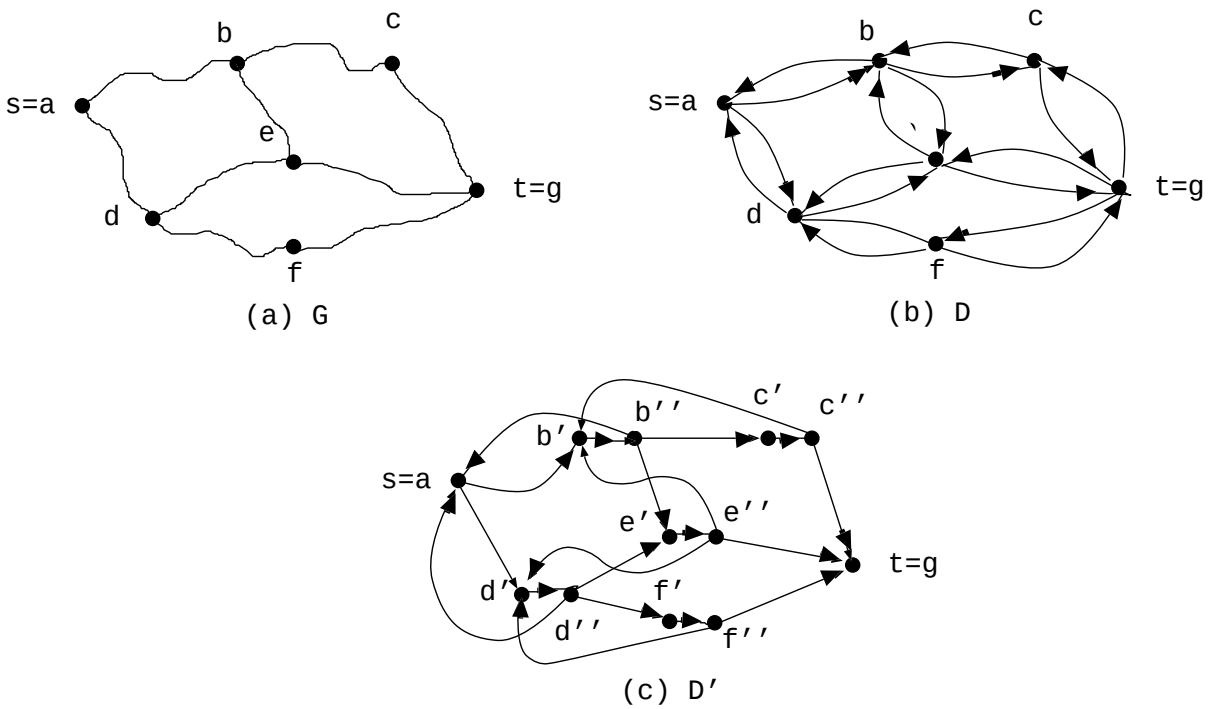

図 9.15: (a) G 与えられた無向グラフ; (b) G から構成される有向グラフ D; (c) D から構成される有向グラフ D'