凸幾何の端点演算子による特徴付けについて

筑波大学社会工学系
安藤 和敏

Coma Seminar
2001.5.07

アラインメント

X を有限集合とする．X の部分集合族 $\mathcal{L}$ が，以下の２条件

(A1) $\emptyset, X \in \mathcal{L}$.

(A2) $A, B \in \mathcal{L} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{L}$.

を満足するとき，$(X, \mathcal{L})$ を **alignment** と呼ぶ．$\mathcal{L}$ の元を閉集合と呼ぶ．

アラインメント $(X, \mathcal{L})$ に対して，$\tau_{\mathcal{L}}\colon 2^X \to 2^X$ を

$$\tau_{\mathcal{L}}(A) = \bigcap\{C \mid A \subseteq C \in \mathcal{L}\} \quad (A \subseteq X)$$

で定義する．つまり，$\tau_{\mathcal{L}}(A)$ は A を含む最小の閉集合．

Proposition 1: $\tau_{\mathcal{L}}$ は閉包演算子である．　即ち，$\tau := \tau_{\mathcal{L}}$ は以下の *(C1)*–*(C4)* を満足する．

(C1) $\tau(\emptyset) = \emptyset$.

(C2) $\forall A \subseteq X\colon A \subseteq \tau(A)$.

(C3) $\forall A, B \subseteq X\colon A \subseteq B \Longrightarrow \tau(A) \subseteq \tau(B)$ (Monotonicity).

(C4) $\forall A \subseteq X\colon \tau(\tau(A)) = \tau(A)$ (Idempotence).

□

閉包演算子からアラインメント

逆に

Proposition 2: 閉包演算子$\tau\colon 2^X \to 2^X$が与えられたときに，$\mathcal{L} \subseteq 2^X$を

$$\mathcal{L} = \{A \mid A \in 2^X, \tau(A) = A\}$$

で定義すると$(X, \mathcal{L})$はアラインメントになる．さらに，$\tau_{\mathcal{L}} = \tau$． □

- 以降は，$\mathcal{L}$が文脈から明らかなときは$\tau_{\mathcal{L}}$の代りにτと書いたりする．

例

- 有限集合 $X \subseteq \mathbf{R}^n$.

$$\tau(A) = \mathrm{conv.hull}(A) \cap X \quad (A \subseteq X).$$

$$\mathcal{L} = \text{“凸集合” 全体}$$

- 有限半順序集合 $P = (X, \preceq)$.

$$\begin{aligned} \tau(A) &= \{x \mid x \in X, \exists a \in A \colon x \preceq a\} \\ &= A \text{ で生成されるイデアル.} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L} = P \text{ のイデアル全体.}$$

端点演算子

$(X, \mathcal{L})$をアラインメントとする.

- 部分集合$A \subseteq X$に対して, $\tau(S) = \tau(A)$となる$S \subseteq A$を, Aの**spanning set** と呼ぶ. 特に, A の極小な spanning set を基底と呼ぶ.

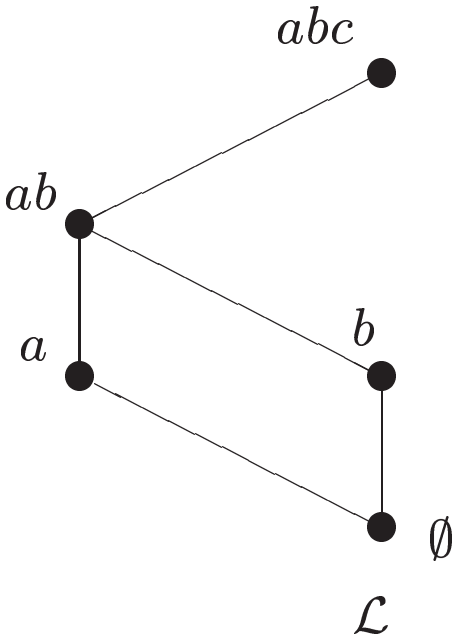
- ex: $2^X \to 2^X$ を

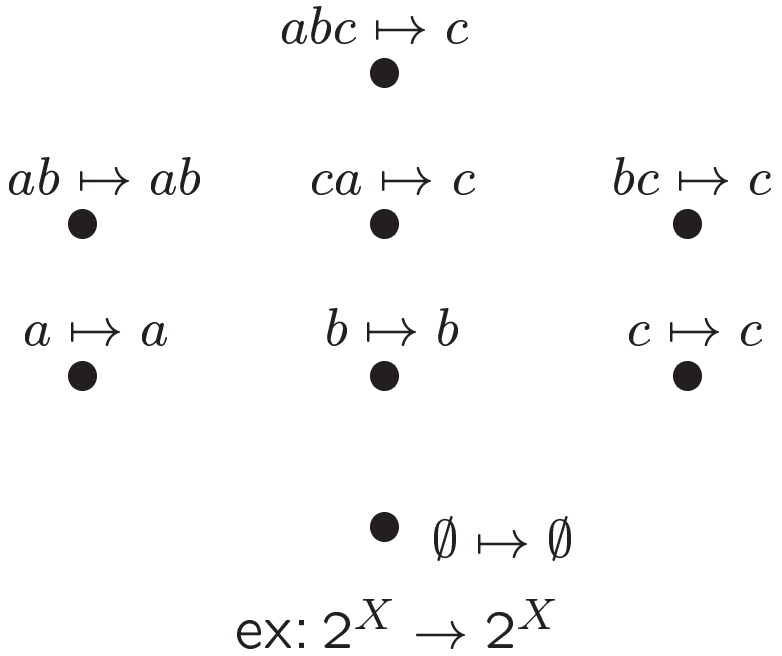
$$\mathrm{ex}(A) = \{p \mid p \in A, p \notin \tau(A - p)\} \quad (A \subseteq X)$$

で定義し, $(X, \mathcal{L})$ の端点演算子と呼ぶ. $p \in \mathrm{ex}(A)$ は, A の端点と呼ばれる. $(X, \mathcal{L})$ の端点演算子であることを強調するために ex の代りに $\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}$ と書くこともある.

- $A \subseteq X$ は, $\mathrm{ex}(A) = A$ のとき **free** と呼ばれる.
$\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ =the free sets of $(X, \mathcal{L})$ とする.

Example 3:



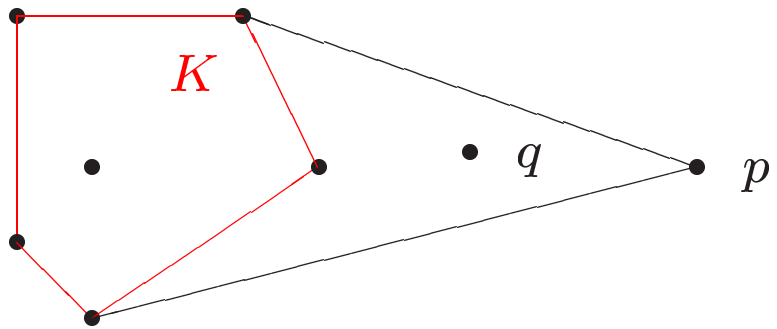


$\mathrm{ex}(\mathcal{L}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}\}$ である.

凸幾何

アラインメント $(X, \mathcal{L})$ は以下の反交換公理

(AE) $\forall K \in \mathcal{L}, \forall p, q \notin K\colon q \in \tau(K \cup p) \Longrightarrow p \notin \tau(K \cup q)$.



を満足するとき，凸幾何と呼ばれる．アラインメント $(X, \mathcal{L})$ が凸幾何であるとき，閉集合 $K \in \mathcal{L}$ のことを特に凸集合と呼ぶこともある．

Theorem 4 (Edelman and Jamison): アラインメント$(X, \mathcal{L})$が凸幾何であることと以下の全ては同値.

(a) 任意の閉集合$K \neq X$に対して, $K \cup p$が閉であるような$p \in X$が存在する.

(b) 任意の$A \subseteq X$は一意的な基底を持つ.

(c) 任意の閉集合Kに対して, $K = \tau(\mathrm{ex}(K))$ (有限 Minkowski-Krein-Milman 性).

(d) 任意の閉集合Kと$p \notin K$に対して, $p \in \mathrm{ex}(\tau(K \cup p))$.

結果

Theorem 5: アラインメント $(X, \mathcal{L})$ が凸幾何であることと以下の全ては同値.

(1) *Minkowski-Krein-Milman* 性の逆*:* $\forall A \subseteq X\colon \mathrm{ex}(\tau(A)) = \mathrm{ex}(A)$.

(2) $\mathrm{ex}|_{\mathcal{L}}\colon \mathcal{L} \to \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ が全単射.

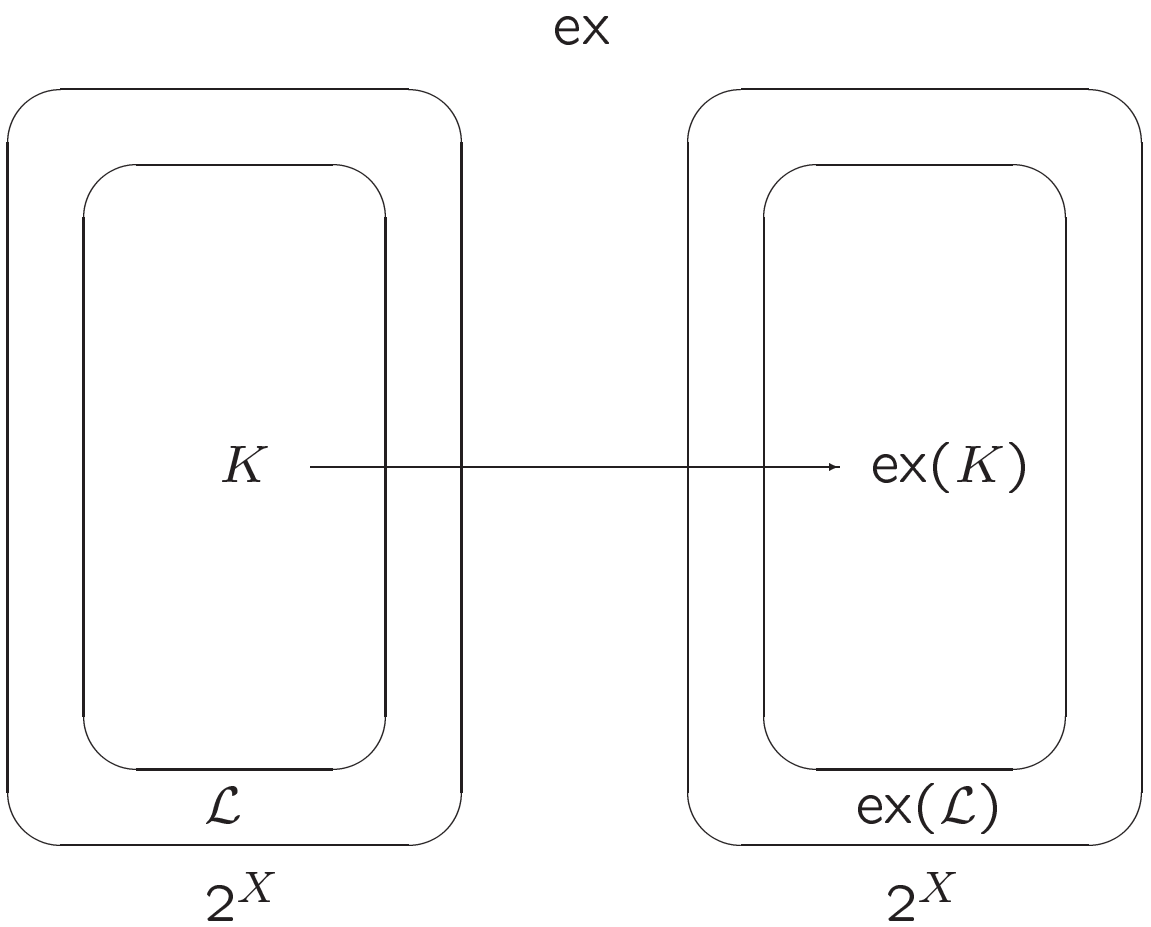
(3) **PI***:* $\forall A, B \subseteq X\colon \mathrm{ex}(A \cup B) = \mathrm{ex}(\mathrm{ex}(A) \cup \mathrm{ex}(B))$.

(4) **Aizerman***:* $\forall A, B \subseteq X\colon \mathrm{ex}(B) \subseteq A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{ex}(A) \subseteq \mathrm{ex}(B)$.

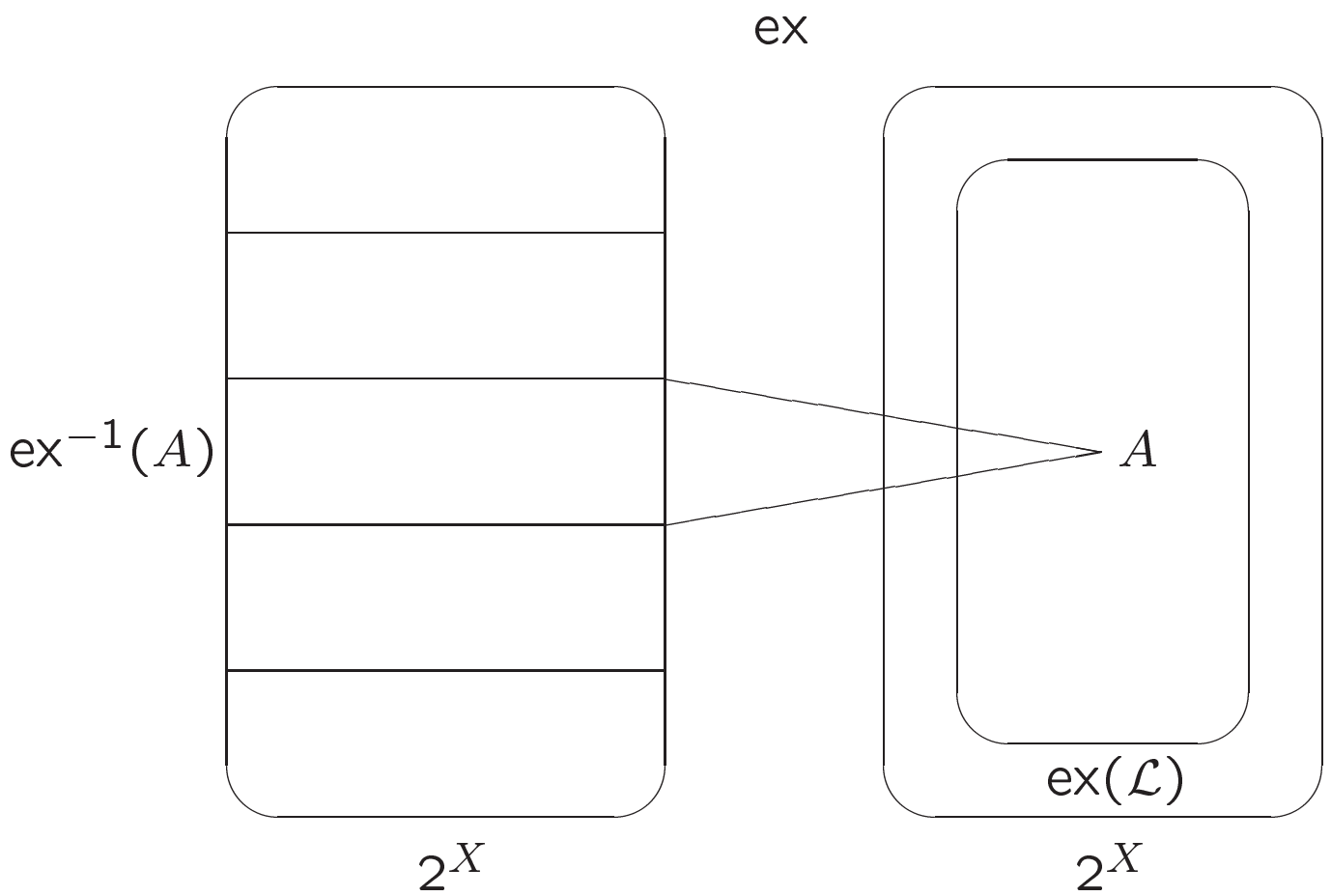
(5) 各 $A \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ に対して, $\mathrm{ex}^{-1}(A)$ が区間である.

□

特徴付け (2) — $\mathrm{ex}|_{\mathcal{L}}\colon \mathcal{L} \to \mathrm{ex}(\mathcal{L})$が全単射 —



特徴付け (5) — $\mathrm{ex}^{-1}(A)$が区間 —



Koshevoy の端点演算子の特徴付けの別証

Theorem 6 (ほとんど Koshevoy): *A mapping* $S\colon 2^X \to 2^X$ *is the extreme operator of a convex geometry if and only if it satisfies*

(Ex1) $\forall A \subseteq X\colon S(A) \subseteq A$.

(Ex2) $\forall p \in X\colon S(\{p\}) = \{p\}$.

(Ex3) $A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow S(B) \cap A \subseteq S(A)$ (Chernoff).

and

(Aizerman) $\forall A, B \subseteq X\colon S(B) \subseteq A \subseteq B \Rightarrow S(A) \subseteq S(B)$.

□

アラインメントの端点演算子に関係する諸命題

Proposition 7: $A \subseteq X$ が閉であるための必要十分条件は，任意の$p \notin A$に対して$p \in \mathrm{ex}(A \cup p)$となることである．

(Proof) (十分性:) Aを閉とする．$p \notin A$ならば，$\tau((A \cup p) - p) = \tau(A) = A \not\ni p$．よって，$p \in \mathrm{ex}(A \cup p)$.

(必要性:) 任意の$p \notin A$に対して，$p \in \mathrm{ex}(A \cup p)$とする．すると，$p \notin A$ならば$p \notin \tau((A \cup p) - p) = \tau(A)$．即ち，$\tau(A) \subseteq A$. □

Proposition 8 (Edelman and Jamison): $A \subseteq X$として，$B \subseteq A$をAの任意の *spanning set* とするとき，$\mathrm{ex}(A) \subseteq B$.

(Proof) BをAの基底として，pをAの端点とする． もし，$p \notin B$であれば，$B \subseteq A - p$であるから，$\tau(B) \subseteq \tau(A - p) \subsetneq \tau(A)$．これは，$B$が$A$の基底ということに反する．□

Proposition 9 (Chernoff性; 柏原-岡本 for cg): $A \subseteq B \subseteq X$ならば，$\mathrm{ex}(B) \cap A \subseteq \mathrm{ex}(A)$である．

(Proof) $p \in \mathrm{ex}(B) \cap A$ならば，$p \notin \tau(B - p)$である． さらに$\tau(A - p) \subseteq \tau(B - p)$であるから，$p \notin \tau(A - p)$. □

Proposition 10 (柏原-岡本 for cg): K を閉集合とするとき，p が K の端点であるための必要十分条件は $K - p$ が閉になることである．

(Proof) (必要性:) $p \in K$ を K の端点とする．$\tau(K - p) \subseteq K - p$ を示せば良い．$\tau(K - p) \subseteq \tau(K) = K$．また p は端点であるから，$p \notin \tau(K - p)$．よって，$\tau(K - p) \subseteq K - p$.

(十分性:) これは明らか．□

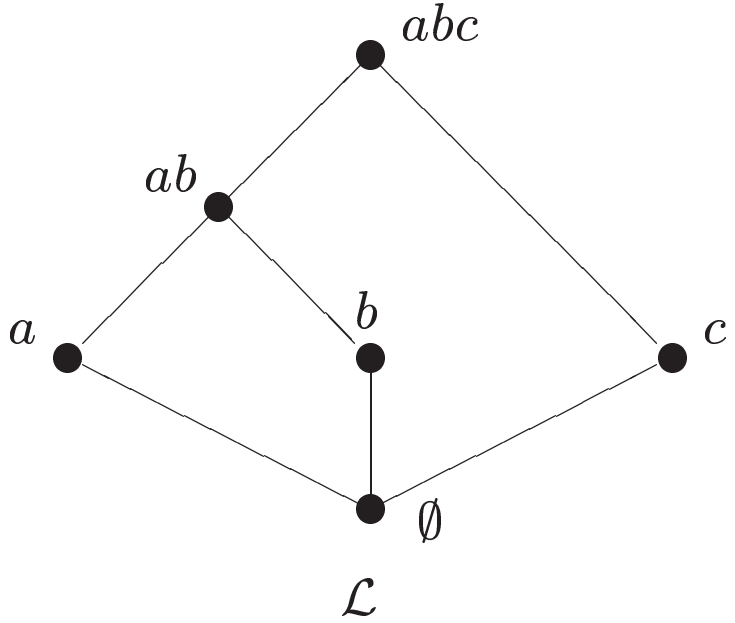
Lemma 11: 任意の $A \subseteq X$ に対して, $\mathrm{ex}(\tau(A)) \subseteq \mathrm{ex}(A)$.

(Proof) $p \in \mathrm{ex}(\tau(A))$ とすると, $p \notin \tau(\tau(A) - p)$.

$$A - p \subseteq \tau(A) - p \ \Rightarrow \tau(A - p) \subseteq \tau(\tau(A) - p)$$

ゆえに, $p \notin \tau(A - p)$. また $p \in \tau(A)$ であるから, $A \neq A - p$, 即ち, $p \in A$ でないといけない. よって, $p \in \mathrm{ex}(A)$. □

Remark 12: 例えば，下図で表されるようなアラインメント $(X, \mathcal{L})$ を考えよう．ここで，$X = \{a, b, c\}$，$\mathcal{L} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ である．



$A = \{a, c\}$ とすると，$\mathsf{ex}(A) = \{a, c\}$ であるのに対して，$\tau(A) = \{a, b, c\}$ であるので，$\mathsf{ex}(\tau(A)) = \{c\}$ となるので，$\mathsf{ex}(\tau(A)) \subsetneq \mathsf{ex}(A)$ である．

Theorem 13: アラインメント $(X, \mathcal{L})$ が凸幾何であるための必要十分条件は，任意の $A \subseteq X$ に対して $\mathrm{ex}(A) = \mathrm{ex}(\tau(A))$ となることである．

(Proof) 補題 11 によって，一般に $\mathrm{ex}(A) \supseteq \mathrm{ex}(\tau(A))$ である．もし，$\mathcal{L}$ が凸幾何であるならば定理 4(c) によって，$\mathrm{ex}(\tau(A))$ は A の spanning set であるから，命題 8 より $\mathrm{ex}(A) \subseteq \mathrm{ex}(\tau(A))$．

逆に $\mathcal{L}$ が凸幾何でないとする．定理 4(d) によって，ある閉集合 K と $p \notin K$ が存在して，$p \notin \mathrm{ex}(\tau(K \cup p))$．ところが，命題 7 によって，$p \in \mathrm{ex}(K \cup p)$ であるから，$\mathrm{ex}(K \cup p) \supsetneq \mathrm{ex}(\tau(K \cup p))$．□

Corollary 14: アラインメント $(X, \mathcal{L})$ が凸幾何であるための必要十分条件は，任意の $A \subseteq X$ に対して $\tau(A) = \tau(\mathrm{ex}(A))$ となることである．

(Proof) 十分性は定理 4(c) より従う． 必要性を証明するために，$\mathcal{L}$ が凸幾何として，$A \subseteq X$ を任意とする． 定理 4(c) と定理 13 によって，$\tau(A) = \tau(\mathrm{ex}(\tau(A))) = \tau(\mathrm{ex}(A))$ である． □

凸幾何の端点集合の族

Proposition 15 (Idempotency): $(X, \mathcal{L})$をアラインメントとする．任意の $A \subseteq X$ に対して，$\mathrm{ex}(\mathrm{ex}(A)) = \mathrm{ex}(A)$.

(Proof) $\mathrm{ex}(A) \subseteq A$であるから，命題 9によって$\mathrm{ex}(A) = \mathrm{ex}(A) \cap \mathrm{ex}(A) \subseteq \mathrm{ex}(\mathrm{ex}(A))$. □

$(X, \mathcal{L})$をアラインメントとする．$\mathrm{ex}(\mathcal{L}) \subseteq 2^X$ を

$$\mathrm{ex}(\mathcal{L}) = \{\, A \mid A \subseteq X, \mathrm{ex}(A) = A \,\}$$

と定義する． 命題 15によって，写像$\mathrm{ex}\colon 2^X \to \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ は，well-defined である.

Theorem 16: アラインメント $\mathcal{L}$ が凸幾何であれば，$\mathrm{ex}|_{\mathcal{L}}\colon \mathcal{L} \to \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ が全単射となる．

(Proof) 定理 13によって，$\mathrm{ex}(A) = \mathrm{ex}(\tau(A))$ である．したがって，$\mathrm{ex}|_{\mathcal{L}}$ が全射であることは明らか．

$K, K' \in \mathcal{L}$ かつ $\mathrm{ex}(K) = \mathrm{ex}(K')$ ならば MKM 性（定理 4(c)）によって $K = \tau(\mathrm{ex}(K)) = \tau(\mathrm{ex}(K')) = K'$. □

Corollary 17: アラインメント $(X, \mathcal{L})$ が凸幾何であるならば，各 $\emptyset \neq A \subseteq X$ に対して $\mathrm{ex}(A) \neq \emptyset$ となる．

(Proof) $(X, \mathcal{L})$ を凸幾何であるとする．$A \subseteq X$ とする．$\mathrm{ex}(A) = \emptyset$ ならば，系 14によって，$\mathrm{ex}(\tau(A)) = \emptyset$. さらに，定理 16によれば，$\tau(A) = \emptyset$ であるから，τ の単調性によって $A = \emptyset$. □

定理 16の逆も言える.

Theorem 18: $\mathrm{ex}|_{\mathcal{L}}: \mathcal{L} \to \mathrm{ex}(\mathcal{L})$が一対一対応であるならば, $(X, \mathcal{L})$は凸幾何である.

(Proof) $\mathrm{ex}|_{\mathcal{L}}: \mathcal{L} \to \mathrm{ex}(\mathcal{L})$が一対一対応であるとする. もし, $(X, \mathcal{L})$が凸幾何でないのならば定理 4(c) によって, ある閉集合$K \in \mathcal{L}$が存在して, $K \supsetneq \tau(\mathrm{ex}(K))$ となる. Kとして, そのような閉集合のうちで$\mathrm{ex}(K)$が極大なものを選ぼう.

BをKのある基底とすると, $\mathrm{ex}(K)$はKを張れないから$B \supsetneq \mathrm{ex}(K)$である. さらに, $B \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$である. なぜならば$b \in B$とすると, BはKの極小なspanning setであるから, $\tau(B-b) \subsetneq K = \tau(B)$. したがって, $b \notin \tau(B-b)$ だからである. $\mathrm{ex}|_{\mathcal{L}}$が全単射であるから, ある$K \neq L \in \mathcal{L}$が存在して$B = \mathrm{ex}(L)$となる. ところが, Kの選び方から$L = \tau(\mathrm{ex}(L)) = \tau(B) = K$. これは矛盾である. □

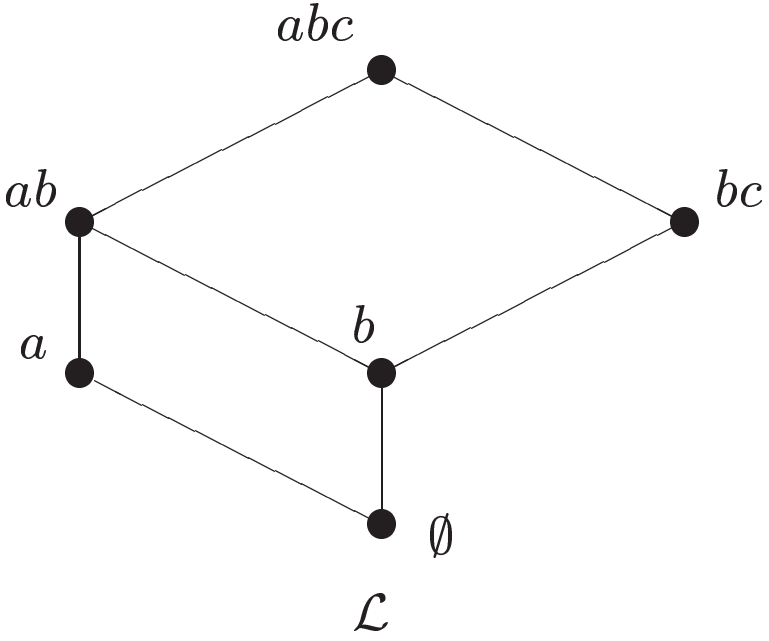
したがって, 以下の系を得る.

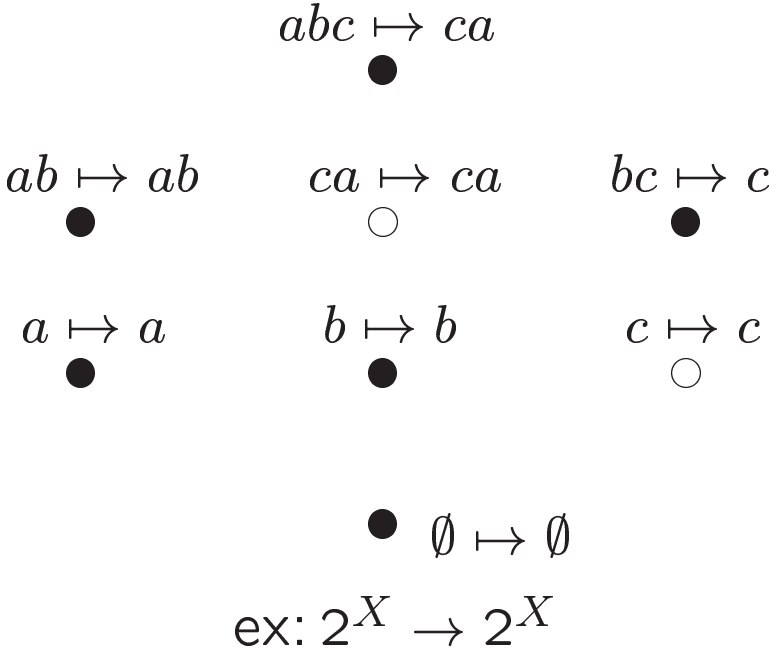
Corollary 19: アラインメント $(X, \mathcal{L})$ が凸幾何であるための必要十分条件は, $\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}\colon \mathcal{L} \to \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ が全単射となる事である. □

Proposition 20 (柏原-岡本 for cg): $\mathcal{L}$をアラインメントとする．$A \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ かつ$B \subseteq A$ならば$B \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$.

(Proof) $A = \mathrm{ex}(A)$とする． 命題9により，$B = B \cap A = B \cap \mathrm{ex}(A) \subseteq \mathrm{ex}(B)$．また，$\mathrm{ex}(B) \subseteq B$は定義から明らか．□

Example 21: 下のハッセ図で示されるアラインメント (実際, 凸幾何) $(X, \mathcal{L})$ を考える. $X = \{a, b, c\}, \mathcal{L} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ である.





端点演算子からアラインメントを得ること

Proposition 22: 任意のアラインメントに対して, $S = \mathrm{ex}\colon 2^X \to 2^X$ は, 以下の *(Ex1)–(Ex3)* を満足する.

(Ex1) $\forall A \subseteq X\colon S(A) \subseteq A$.

(Ex2) $\forall p \in X\colon S(\{p\}) = \{p\}$.

(Ex3) $A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow S(B) \cap A \subseteq S(A)$ (Chernoff 性).

(Proof) (Ex1) は自明. (Ex2) も定義から明らか. (Ex3) は命題 9 による. □

Proposition 23: (Ex1) *and* (Ex3) *imply the following*

(Ex4) $\forall A \subseteq X : S(A) = S(S(A))$ (Idempotence).

(Proof) (Ex1)によって$S(S(A)) \subseteq S(A)$. 逆の包含関係を示したい. (Ex1)によって$S(A) \subseteq A$であるから, (Ex3)によって$S(A) = S(A) \cap S(A) \subseteq S(S(A))$. □

Proposition 24 (Moulin): *Chernoff* (Ex3) *is equivalent to any one of the followings four conditions provided that* (Ex1) *holds.*

(Ex3a) $\forall A, B \subseteq X : S(A \cup B) \subseteq S(S(A) \cup B)$.

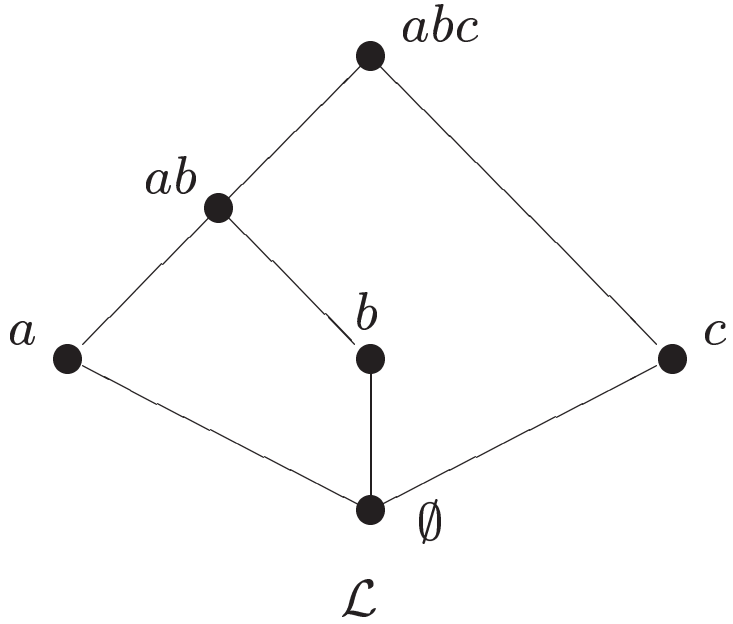
(Ex3b) $\forall A, B \subseteq X : S(A \cup B) \subseteq S(S(A) \cup S(B))$.

(Ex3c) $\forall A, B \subseteq X : S(A \cup B) \subseteq S(A) \cup S(B)$.

(Ex3d) $\forall A, B \subseteq X : S(A \cup B) \subseteq S(A) \cup B$.

□

Remark 25: The reverse inclusion, say (Ex3c), does not hold in general. Consider the alignment $(X, \mathcal{L})$ in Remark 12. For $A = \{a\}$ and $B = \{b, c\}$ we have $\mathrm{ex}(A) = \{a\}$ and $\mathrm{ex}(B) = \{b, c\}$ but $\mathrm{ex}(A \cup B) = \mathrm{ex}(\{a, b, c\}) = \{c\}$.



Theorem 26: 写像 $S\colon 2^X \to 2^X$ に対して，(Ex1)–(Ex3) が成り立つとする．$\mathcal{L} \subseteq 2^X$ を

$$\mathcal{L} = \{A \mid A \subseteq X, \forall p \in X - A\colon p \in S(A \cup p)\} \tag{1}$$

で定義すると，$(X, \mathcal{L})$ はアラインメントになる．さらに，任意の $K \in \mathcal{L}$ に対して $S(K) = \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(K)$ であるが，一般に $S \supseteq \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}$ である．

(Proof) (前半:) $X \in \mathcal{L}$ は自明に成り立つ．(Ex2) によって，任意の $p \in X$ に対して $p \in S(\{p\})$ であるから，$\emptyset \in \mathcal{L}$ である．したがって，(A1) は示された．(A2) を示そう．

$A, B \in \mathcal{L}$ とする．$p \in X - (A \cap B)$ を考えよう．$p \in X - A$ または $p \in X - B$ であるから，$\mathcal{L}$ の定義より，$p \in S(A \cup p)$ または $p \in S(B \cup p)$ である．(Ex3) を，$(A \cap B) \cup p \subseteq A \cup p$ と $(A \cap B) \cup p \subseteq B \cup p$ に対して適用すると，$p \in S(A \cup p) \cap ((A \cap B) \cup p)$ または $p \in S(B \cap p) \cap ((A \cap B) \cup p)$ であるから，$p \in S((A \cap B) \cup p)$ が得られる．したがって，$A \cap B \in \mathcal{L}$ である．

(後半:) 最初に任意の $A \subseteq X$ に対して, $\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A) \subseteq S(A)$ であることを示そう. $p \in \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A)$ とすると, $p \in A$ かつ $p \notin \tau(A-p)$. $\tau(A-p) \in \mathcal{L}$ であるから,

$$\forall q \notin \tau(A-p) \colon q \in S(\tau(A-p) \cup q).$$

$p \notin \tau(A-p)$ であるから, $p \in S(\tau(A-p) \cup p)$. $A \subseteq \tau(A-p) \cup p$ かつ $p \in A$ であるから, (Ex3) によって $p \in S(A)$.

$K \in \mathcal{L}$ とする. $S(K) \subseteq \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(K)$ を示すためには, 命題 10 によって, 任意の $p \in S(K)$ に対して $K - p \in \mathcal{L}$ という事を示せば良い. $p \in S(K)$ としよう.

$q \notin K - p$ とする. もし $q \neq p$ ならば $q \notin K$ であるから, $K \in \mathcal{L}$ という事によって, $q \in S(K \cup q)$ である. ところで, $K - p \cup q \subseteq K \cup q$ であるから, S に対する Chernoff 性により,

$$q \in S(K \cup q) \cap (K - p \cup q) \subseteq S(K - p \cup q).$$

もし $q = p$ であるのなら, $q = p \in S(K) = S(K - p \cup q)$. ゆえに, $K - p \in \mathcal{L}$. □

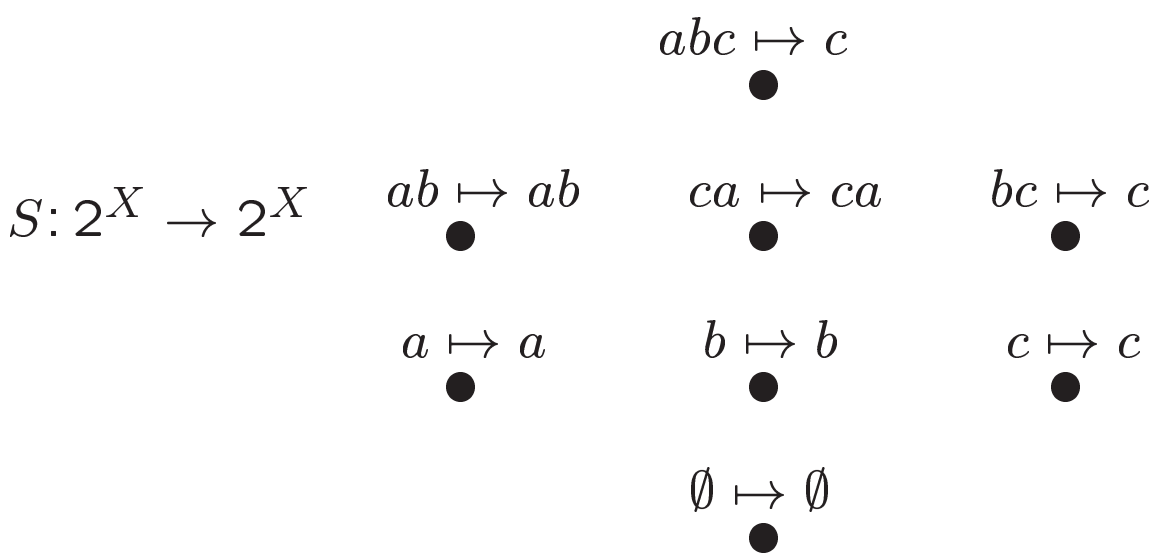
Remark 27: 残念ながら，一般に $S \neq \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}$ である．下図で示される $S\colon 2^X \to 2^X$ を考えよう．これは，前の例 21 の ex を用いて，

$$S(A) = \begin{cases} \{c\} & \text{if } A = X, \\ \mathrm{ex}(A) & \text{otherwise} \end{cases}$$

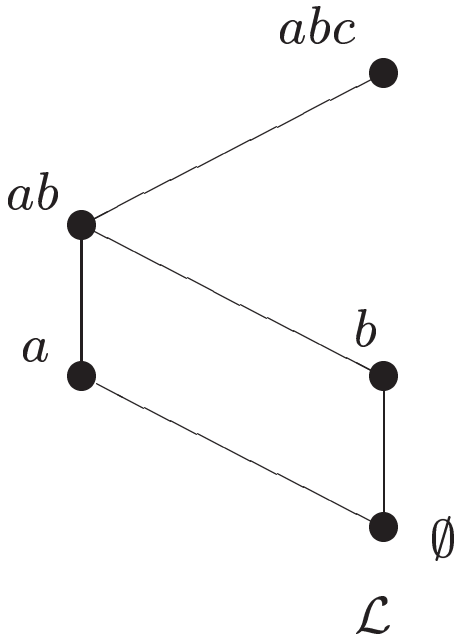
と書ける．S が Chernoff を満足する事を見るためには，任意の $A \neq X$ に対して，$S(X) \cap A \subseteq S(A)$ を見れば良い．ex は Chernoff を満すから，

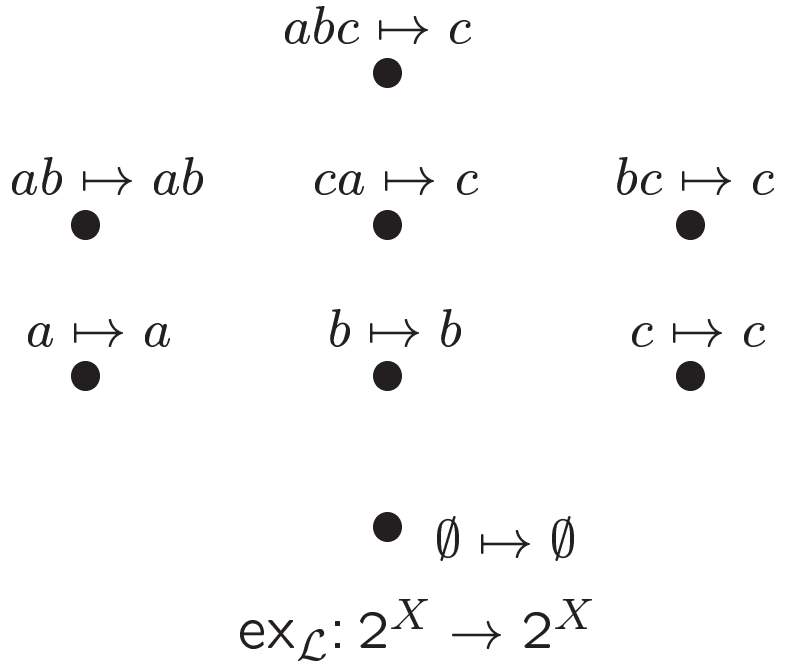
$$S(X) \cap A \subseteq \mathrm{ex}(X) \cap A \subseteq \mathrm{ex}(A) = S(A).$$

他の公理 (Ex1)–(Ex2) は明らかに満している．



このSから(1)で$\mathcal{L}$を定義すると，左の図が得られる．この$\mathcal{L}$から$\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}$を計算すると，





右図となるが，$\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(\{c,a\}) \subsetneq S(\{c,a\})$である．

凸幾何のex演算子による特徴付け

Theorem 28 (Koshevoy): *Suppose that an alignment* $(X, \mathcal{L})$ *is a convex geometry. Then,* $S := \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}$ *satisfies following condition.*

(PI) $\forall A, B \subseteq X \colon S(A \cup B) = S(S(A) \cup S(B))$.

□

Let us consider the following condition.

(Aizerman) $\forall A, B \subseteq X: S(B) \subseteq A \subseteq B \Rightarrow S(A) \subseteq S(B)$.

Proposition 29 (see e.g. Moulin): **Aizerman** *is eqivalent to the following* **Aizerman'** *provided that* $S(S(A))) = S(A)$ *for every* $A \subseteq X$.

(Aizerman') $\forall A, B \subseteq X: S(B) \subseteq A \subseteq B \Rightarrow S(A) = S(B)$.

□

Theorem 30 (Aizerman and Malishevski): *Suppse that (Ex1) holds. Then,*

$$\texttt{PI} \Longleftrightarrow \texttt{Chernoff} + \texttt{Aizerman}.$$

□

Theorem 31: *An alignment* $(X, \mathcal{L})$ *is a convex geometry if and only if* ex: $2^X \to 2^X$ *satisfies* **Aizerman**.

(Proof) Suppose that $(X, \mathcal{L})$ is a convex geometry. Then, it follows from Theorem 28 and Theorem 30 that ex safisfies **Aizerman**.

Conversely, suppose that ex safisfies **Aizerman**. Since we have $\mathrm{ex}^2 = \mathrm{ex}$ by Proposition 23, we have **Aizerman'** by Proposition 29. Let $A \subseteq X$ be arbitrary. We have from Lemma 11 that $\mathrm{ex}(\tau(A)) \subseteq \mathrm{ex}(A) \subseteq \tau(A)$. Then, by **Aizerman** we have $\mathrm{ex}(A) = \mathrm{ex}(\mathrm{ex}(A)) = \mathrm{ex}(\tau(A))$. It thus follows from Theorem 13 that $(X, \mathcal{L})$ is a convex geometry. □

Theorem 32: *Suppose that* $S\colon 2^X \to 2^X$ *satisfies* (Ex1)–(Ex3) *and* **Aizerman**. *Define* $\mathcal{L} \subseteq 2^X$ *by (1). Then,* $(X, \mathcal{L})$ *is a convex geometry and we have* $S = \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}$.

(Proof) 定理 26によって, $\mathcal{L}$はアラインメント, $\mathrm{ex}_{\mathcal{L}} \subseteq S$, かつ, 任意の$K \in \mathcal{L}$に対して, $S(K) = \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(K)$である事に注意しておく.

最初に, $\mathcal{L}$が凸幾何という事を示す. $A \subseteq X$を任意とする. 定理 26と補題 11によって,

$$S(\tau(A)) = \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(\tau(A)) \subseteq \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A) \subseteq \tau(A).$$

上式に**Aizerman** を適用すると, $S(\tau(A)) = S(\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A))$.

$\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A) \subseteq S(A)$が示されたわけであるが, (Ex3)と(Ex1)によって,

$$\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A) = \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A) \cap S(A) = \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A) \cap S(S(A)) \subseteq S(\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A)).$$

(Ex1)を用いて, $\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A) = S(\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A))$.

したがって,

$$\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A) = S(\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A)) = S(\tau(A)) = \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(\tau(A)). \tag{2}$$

定理 13によって, $\mathcal{L}$ は凸幾何である.

次に, $S = \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}$を示す. 式(2)と定理 26によって,

$$S(\tau(A)) = \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A) \subseteq S(A) \subseteq \tau(A).$$

これに `Aizerman` を適用すると,

$$\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A) = S(\tau(A)) = S(S(A)) = S(A).$$

□

Koshevoy の結果との比較

Corollary 33: *A mapping* $S\colon 2^X \to 2^X$ *is the extreme operator of a convex geometry if and only if* S *satisfies (Ex1)–(Ex3) and (Ex6). Furthermore, a convex geometry is uniquely determined by its extreme operator.* □

関数 $S\colon 2^X \to 2^X$ は，以下の (C1)–(C2) を満足するとき選択関数と呼ばれる．

(C1) $S(\emptyset) = \emptyset$.

(C2) $\emptyset \neq S(A) \subseteq A \quad (\emptyset \neq A \subseteq X)$.

Koshevoy の結果は，上と同値な

Corollary 34 (Koshevoy): *A choice function* $S\colon 2^X \to 2^X$ *is the extreme operator of a convex geometry if and only if* S *satisfies Path Independence.* □

Remark 35: Koshevoy は，選択関数 $S\colon 2^X \to 2^X$ が与えられたとき，

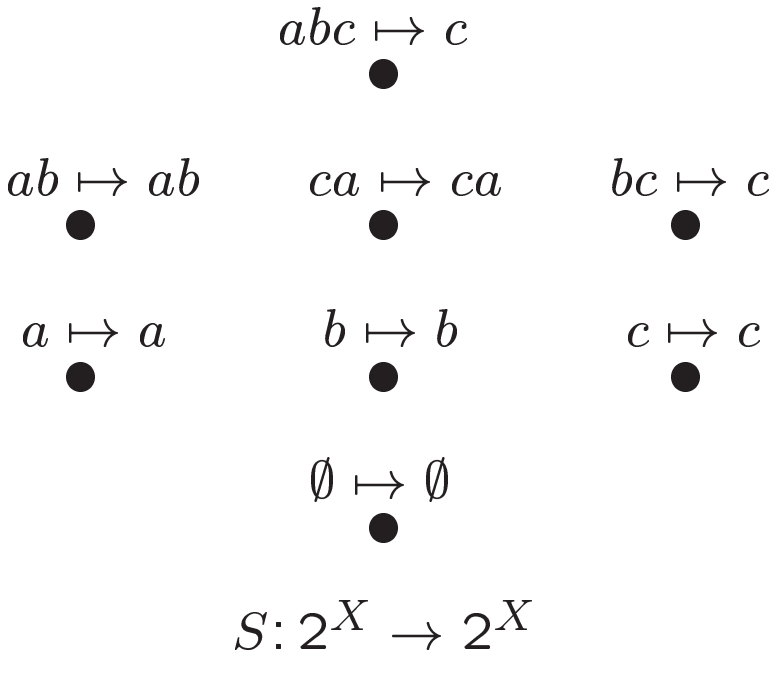
$$\bar{S}(A) = \bigcup\{A' \mid A \subseteq X, S(A') = S(A)\} \quad (A \subseteq X)$$

で $\bar{S}\colon 2^X \to 2^X$ を定義して，もし S が Path Independence を満足するならば，$\bar{S}$ が，ある凸幾何の閉包演算子であることを示した．

凸幾何は端点演算子によって一意に決定される．もし S が PI を満たすのであれば，Koshevoy の結果も A の結果も同一の凸幾何を与える．

よって，我々の結果（定理 32）と Koshevoy の結果は同じ結論を導きだすが，途中の経過が違うので互いに補完し合うものである．

Remark 36: Chernoff を満足する一般の S に対して，A の結果は必ずアラインメントを与えるに対して $\bar{S}$ は閉包演算子にならない．注意 27 の例を見てみよう．$\bar{S}(\{c\}) = \{a, b, c\} \not\subseteq \{c, a\} = \bar{S}(\{c, a\})$ である．



One More Characterization

For an alignment $(X, \mathcal{L})$ and $A \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$, let us consider family $\mathrm{ex}^{-1}(A)$. If $B \in \mathrm{ex}^{-1}(A)$, then we have $A = \mathrm{ex}(B) \subseteq B$. Hence, $\mathrm{ex}^{-1}(A)$ has a minimum element A.

Theorem 37 (Dean and Johnson for "if part"): *An alignment* $(X, \mathcal{L})$ *is a convex geometry if and only if for each* $A \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ $\mathrm{ex}^{-1}(A)$ *is an interval.*

(Proof) ("if" part:) Suppose that $(X, \mathcal{L})$ is a convex geometry and let $A \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$. We claim that $\mathrm{ex}^{-1}(A) = [A, \tau(A)]$. Let $B \in \mathrm{ex}^{-1}(A)$. We have shown that $A \subseteq B$. Also, we have from Corollary 14 that $B \subseteq \tau(B) = \tau(\mathrm{ex}(B)) = \tau(A)$. Conversely, suppose that $A \subseteq B \subseteq \tau(A)$. Since we have from Theorem 13 that $A = \mathrm{ex}(\tau(A))$, it follows from (**Aizerman**) that $\mathrm{ex}(B) = A$.

("only if" part:) Suppose that for each $A \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ $\mathrm{ex}^{-1}(A)$ is an interval $[A, B]$ for some $B \subseteq X$. We will show that ex satisfies **Aizerman**.

Suppose that $\mathrm{ex}(D) \subseteq C \subseteq D$ for $C, D \subseteq X$. Let $A = \mathrm{ex}(D)$. Since $D \in \mathrm{ex}^{-1}(A)$, we have $C \in \mathrm{ex}^{-1}(A)$, i.e., $\mathrm{ex}(C) = A = \mathrm{ex}(D)$.

It follows from Theorem 31 that $(X, \mathcal{L})$ is a convex geometry. □

Characterization of Distributive Lattices

Theorem 38 (Koshevoy (see also 柏原-岡本)):
Suppose that $(X, \mathcal{L})$ *is a convex geometry. Then,* $\mathcal{L}$ *is a distributive lattice if and only if* $S := \mathrm{ex}$ *satisfies:*

(Expansion) $\forall A, B \subseteq X\colon S(A) \cap S(B) \subseteq S(A \cup B)$.

(Proof) ("only if" part:) Suppose that $\mathcal{L}$ is a distributive lattice. Then, $\mathcal{L}$ is the set of order ideals of a poset $P = (X, \preceq)$ and we have

$$\mathrm{ex}(A) = \{a \mid a \in A,\ \nexists b \in A\colon a \prec b\}.$$

Then, it is easy to see that for each $A, B \subseteq X$ we have $\mathrm{ex}(A) \cap \mathrm{ex}(B) \subseteq \mathrm{ex}(\mathrm{ex}(A) \cup \mathrm{ex}(B))$. Applying **Path Independence** yields **Expansion**.

("if" part:) See [Koshevoy]. □

References

[1] M. A. Aizerman and A. V. Malishevski. General theory of best variants choice: some aspects. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26:1030–1040, 1981.

[2] H. Chernoff. Rational choice functions and orderings. *Econometrica*, 22:121–127, 1954.

[3] R. A. Dean and M. R. Johnson. Path independent choice functions and their lattices. Working Paper 1999-2, Department of Economics, Tulane University, July 1999.

[4] P. Edelman and R. Jamison. Theory of convex geometries. *Geometriae Dedicata*, 19:247–270, 1985.

[5] K. Kashiwabara and Y. Okamoto. A greedy algorithm for convex geometries (in Japanese). RIMS Kokyuroku, 1174:179–191, 2000.

[6] G. A. Koshevoy. Choice functions and abstract convex geometry. *Mathematical Social Science*, 38:35–44, 1999.

[7] H. Moulin. Choice functions over a finite set: A summary. *Social Choice Welfare*, 2:147–160, 1985.