閉包空間と凸幾何の端点演算子

筑波大学社会工学系
安藤 和敏

SAOP
2002.1.12

貪欲家の人々 – greedoids –

- マトロイド
  - 一つのグラフの全域木の全体
  - 行列
- 凸幾何（アンチマトロイド）
  - 半順序集合
  - ポリトープ

(1)Greedoid表紙，(2)家系図

	マトロイド	凸幾何
組合せ的抽象	線型独立性	凸性
閉包演算子	交換公理	反交換公理
閉集合の束	geometric	meet-distributive
極小全域集合	equicardinal	unique
歴史	1930年代~	1980年代~

マトロイドの閉包演算子による定義

X を有限集合とする．$\tau\colon 2^X \to 2^X$ が，以下の (C1)–(C4):

(C1) $\forall A \subseteq X\colon A \subseteq \tau(A)$. (Extensionality)

(C2) $\forall A, B \subseteq X\colon A \subseteq B \Longrightarrow \tau(A) \subseteq \tau(B)$. (Monotonicity)

(C3) $\forall A \subseteq X\colon \tau(\tau(A)) = \tau(A)$. (Idempotence)

(C4) $\forall A \subseteq X, \forall p, q \notin \tau(A)\colon q \in \tau(A \cup p) \Longrightarrow p \in \tau(A \cup q)$.
(Steinitz-MacLane Exchange Axiom)

を満足するとき，X と τ の対 (X, τ) をマトロイド と呼ぶ.

マトロイドの例 − 行列マトロイド −

X を $X \subseteq \mathbf{R}^n$ なる有限集合とする．$A \subseteq X$ に対して，

$$\begin{aligned} \tau(A) &= \{x \mid x \in X, x \text{は} A \text{に線型従属}\} \\ &= X \cap (A \text{で張られる部分空間}) \end{aligned}$$

とすると，(X, τ) はマトロイドになる．

(Proof) (C4)だけを示す．$x, y \notin \tau(A)$ かつ $x \in \tau(A \cup y)$ とする．

$x \in \tau(A \cup y)$ なので，

$$x = \sum_{a \in A} \lambda_a a + \lambda_y y \text{ for some } \lambda_a \in \mathbf{R} (a \in A) \text{ and } \lambda_y \in \mathbf{R}.$$

$x \notin \tau(A)$ だから，$\lambda_y \neq 0$．ゆえに，

$$y = -\sum_{a \in A} \frac{\lambda_a}{\lambda_y} a + \frac{1}{\lambda_y} x.$$

よって，$y \in \tau(A \cup x)$．□

凸幾何（あるいは，アンチマトロイド）

X が有限集合で $\tau\colon 2^X \to 2^X$ が

(C0) $\tau(\emptyset) = \emptyset$.

(C1) $\forall A \subseteq X\colon A \subseteq \tau(A)$. (Extensionality)

(C2) $\forall A, B \subseteq X\colon A \subseteq B \Longrightarrow \tau(A) \subseteq \tau(B)$. (Monotonicity)

(C3) $\forall A \subseteq X\colon \tau(\tau(A)) = \tau(A)$. (Idempotence)

(C4) $\forall A \subseteq X, \forall p, q \notin \tau(A)$ with $p \neq q\colon q \in \tau(A \cup p) \Longrightarrow p \notin \tau(A \cup q)$.
(Antiexchange Axiom)

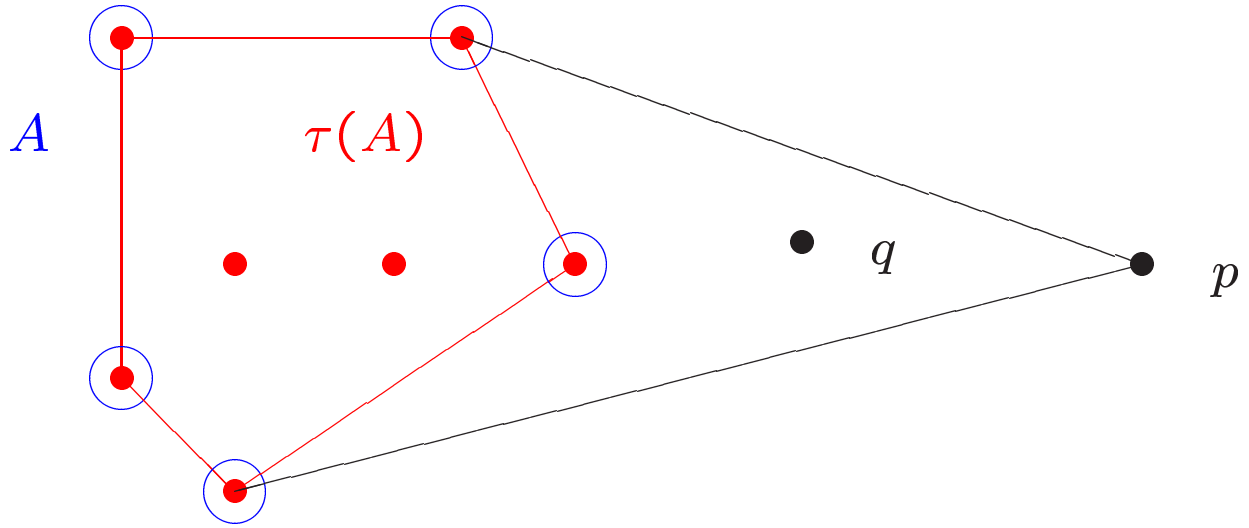
を満足するとき，対 (X, τ) は凸幾何（アンチマトロイド）と呼ばれる．

凸幾何の例1 − 凸シェリング −

有限集合 $X \subseteq \mathbf{R}^n$ に対して, $\tau\colon 2^X \to 2^X$ を

$$\tau(A) = \text{conv.hull}(A) \cap X \quad (A \subseteq X).$$

で定義すると, (X, τ) は凸幾何.



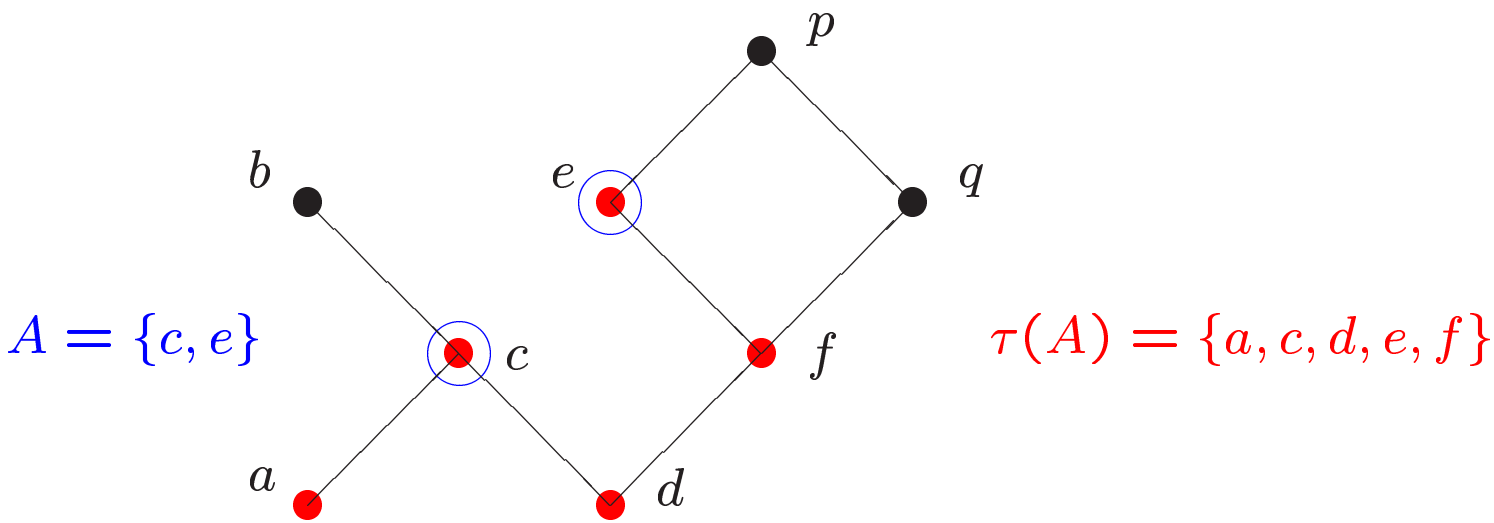
$$\forall A \subseteq X, \forall p, q \notin \tau(A)\colon q \in \tau(A \cup p) \Longrightarrow p \notin \tau(A \cup q).$$

凸幾何の例2 − ポセット・シェリング −

有限半順序集合 $P = (X, \preceq)$ に対して，$\tau\colon 2^X \to 2^X$ を

$$\tau(A) = \{x \mid x \in X, \exists a \in A\colon x \preceq a\} = (A \text{ で生成されるイデアル})$$

で定義すると，(X, τ) は凸幾何．



$$\forall A \subseteq X, \forall p, q \notin \tau(A)\colon q \in \tau(A \cup p) \Longrightarrow p \notin \tau(A \cup q).$$

閉包空間

X を有限集合とする．写像 $\tau\colon 2^X \to 2^X$ が，以下の４条件

(C0) $\tau(\emptyset) = \emptyset$.

(C1) $\forall A \subseteq X\colon A \subseteq \tau(A)$. (Extensionality)

(C2) $\forall A, B \subseteq X\colon A \subseteq B \Longrightarrow \tau(A) \subseteq \tau(B)$. (Monotonicity)

(C3) $\forall A \subseteq X\colon \tau(\tau(A)) = \tau(A)$. (Idempotence)

を満足するとき，(X, τ) を閉包空間と呼ぶ．

マトロイドは交換公理を満たす閉包空間であり，凸幾何は反交換公理を満たす閉包空間である．

閉包空間の閉集合

Proposition 1: 閉包空間(X, τ)に対して，$\mathcal{L} \subseteq 2^X$を

$$\mathcal{L} = \{A \mid A \in 2^X, \tau(A) = A\}$$

で定義すると，

(A1) $\emptyset, X \in \mathcal{L}$.

(A2) $A, B \in \mathcal{L} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{L}$.

□

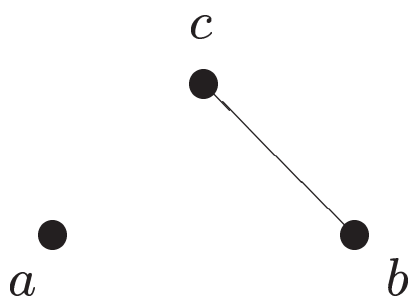
$\mathcal{L}$の元を閉集合と呼ぶ.

例:

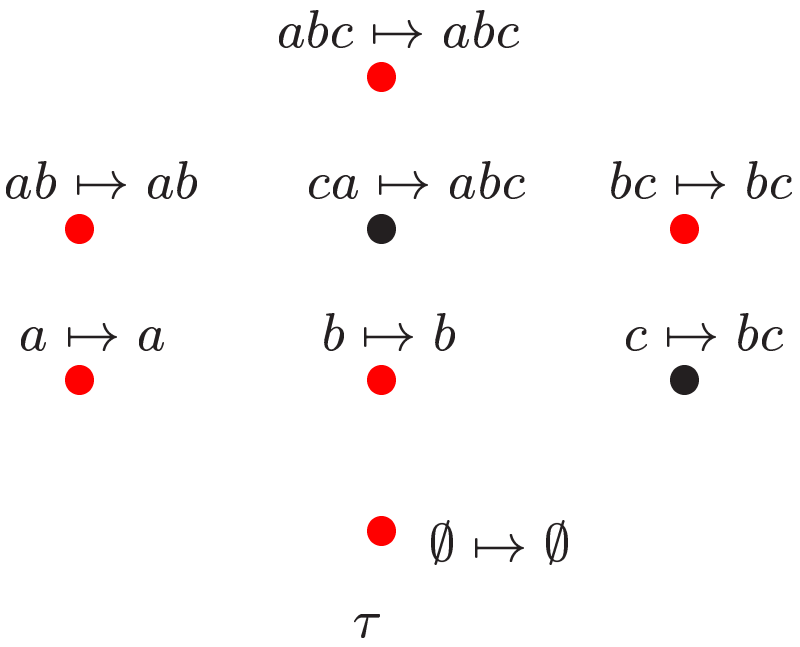
- (X, τ)がマトロイドのときは，閉集合= フラット（部分空間）.
- (X, τ)が凸シェリングのときは，閉集合= “凸集合”.

例 (cont'd): ポセット・シェリングの閉集合＝イデアル

$P = (X, \preceq)$ を有限半順序集合とする.



$P = (X, \preceq)$



τ

閉集合

逆に，

(A1) $\emptyset, X \in \mathcal{L}$.

(A2) $A, B \in \mathcal{L} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{L}$.

を満足する集合族$\mathcal{L}$に対して，$\tau_{\mathcal{L}}\colon 2^X \to 2^X$を

$$\tau_{\mathcal{L}}(A) = \bigcap\{C \mid A \subseteq C \in \mathcal{L}\} \quad (A \subseteq X)$$

で定義する．つまり，$\tau_{\mathcal{L}}(A)$はAを含む最小の閉集合．

Proposition 2: $\tau_{\mathcal{L}}$は閉包演算子である．即ち，$\tau := \tau_{\mathcal{L}}$は(C0)–(C2)を満足する．つまり，$(X, \tau_{\mathcal{L}})$は閉包空間．さらに，$\tau_{\mathcal{L}}$の閉集合は$\mathcal{L}$．　□

端点演算子ex

(X, τ)を閉包空間とする．ex: $2^X \to 2^X$を

$$\mathrm{ex}(A) = \{p \mid p \in A, p \notin \tau(A - p)\} \quad (A \subseteq X)$$

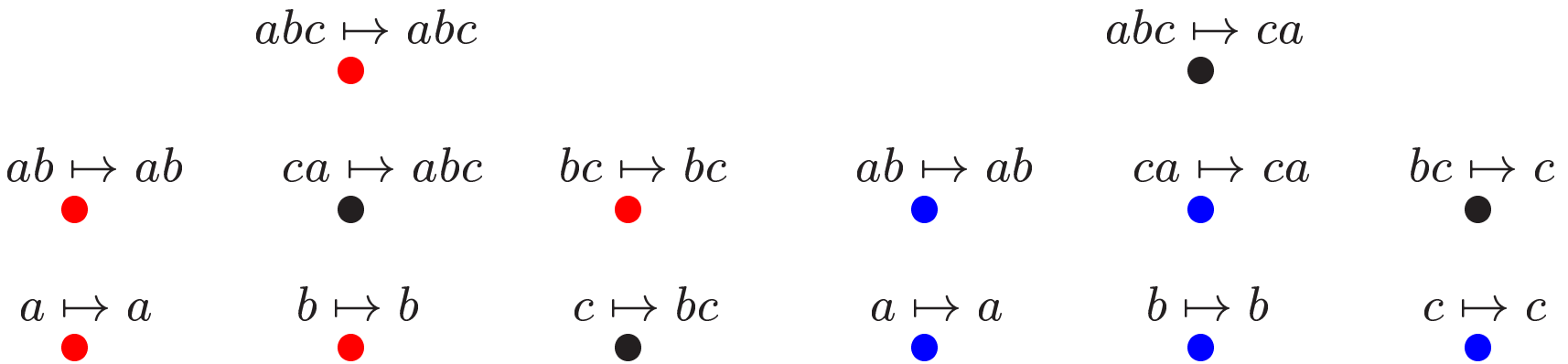
で定義し，$(X, \mathcal{L})$の端点演算子と呼ぶ．$p \in \mathrm{ex}(A)$は，Aの端点と呼ばれる．

例:

- (X, τ)がマトロイドのときは，Aの端点 $=$ Aの全ての基底の共通部分．
- (X, τ)が凸シェリングのときは，A端点$=$ $\mathrm{conv}(A)$の端点．
- (X, τ)がポセット・シェリングのときは，Aの端点 $=$ Aの中で極大なもの．

一般に，$A \neq \emptyset$でも$\mathrm{ex}(A) = \emptyset$となることもある．端点演算子は，閉包演算子の逆関数みたいなものである．

Example 3: 前に構成したポセット・シェリングの閉包空間 (X, τ) に対して，右の端点演算子が得られる．ここで，$X = \{a, b, c\}$.



閉包空間の端点演算子の性質

Proposition 4 (Chernoff性): $A \subseteq B \subseteq X$ ならば, $\mathrm{ex}(B) \cap A \subseteq \mathrm{ex}(A)$ である.

(Proof) $p \in \mathrm{ex}(B) \cap A$ ならば, $p \notin \tau(B - p)$ である. さらに $\tau(A - p) \subseteq \tau(B - p)$ であるから, $p \notin \tau(A - p)$. □

Lemma 5 (A (2001)): (X, τ) を閉包空間とする. 各 $A \subseteq X$ に対して, A の端点 $\mathrm{ex}(A)$ は,

$$\mathrm{ex}(A) = \bigcap \{B \mid B \subseteq A, \tau(B) = \tau(A)\}.$$

と書ける. □

Free subsets (開集合)

(X, τ)を閉包空間とする．$A \subseteq X$は，$\mathrm{ex}(A) = A$のとき開集合と呼ばれる．

例:

- (X, τ)がマトロイドのときは，開集合 = 独立集合．
- (X, τ)が凸シェリングのときは，開集合= 端点集合．
- (X, τ)がポセット・シェリングのときは，開集合 = 反鎖 (antichain)．

閉集合の補集合が開とは限らないし，開集合の補集合が閉とは限らない．

閉包空間を仮定したときの凸幾何の特徴付け 0

Theorem 6 (Edelman and Jamison (1985)): 閉包空間(X, τ)が凸幾何であることと以下の全ては同値.

(a) $\forall A \subseteq X, \forall p, q \notin \tau(A)$ *with* $p \neq q$: $q \in \tau(A \cup p) \Longrightarrow p \notin \tau(A \cup q)$.

(b) 任意の閉集合$K \neq X$に対して, $K \cup p$が閉であるような$p \in X$が存在する.

(c) 任意の$A \subseteq X$は一意的な基底を持つ.

(d) 任意の閉集合Kに対して, $K = \tau(\mathrm{ex}(K))$ (有限 Minkowski-Krein-Milman 性).

MKM 性は, 凸シェリングにおいては「任意のポリトープは, その端点の凸包である」という良く知られた事実に対応する.

閉包空間を仮定したときの凸幾何の特徴付け 1

Theorem 7 (A (2001)): 閉包空間(X, τ)が凸幾何であることと以下の全ては同値.

(1) *Minkowski-Krein-Milman* 性の逆: $\forall A \subseteq X$: $\mathrm{ex}(\tau(A)) = \mathrm{ex}(A)$.

(2) $\mathrm{ex}|_{\mathcal{L}}$: $\mathcal{L} \to \mathcal{E}$ が全単射.

□

Lemma 8 (A (2001)): 任意の $A \subseteq X$ に対して, $\mathrm{ex}(\tau(A)) \subseteq \mathrm{ex}(A)$.

(Proof) Since $A \subseteq \tau(A) = \tau(\tau(A))$,

$$\{B \mid B \subseteq A, \tau(B) = \tau(A)\} \subseteq \{B \mid B \subseteq \tau(A), \tau(B) = \tau(\tau(A))\}.$$

□

Theorem 9 (A (2001)): 閉包空間 $(X, \mathcal{L})$ が凸幾何であるための必要十分条件は, 任意の $A \subseteq X$ に対して $\mathrm{ex}(A) = \mathrm{ex}(\tau(A))$ となることである. □

特徴付け (2)

Proposition 10 (Idempotency): (X, τ) を閉包空間とする． 任意の $A \subseteq X$ に対して，$\mathrm{ex}(\mathrm{ex}(A)) = \mathrm{ex}(A)$.

(Proof) $\mathrm{ex}(A) \subseteq A$ であるから，命題 4 によって $\mathrm{ex}(A) = \mathrm{ex}(A) \cap \mathrm{ex}(A) \subseteq \mathrm{ex}(\mathrm{ex}(A))$. □

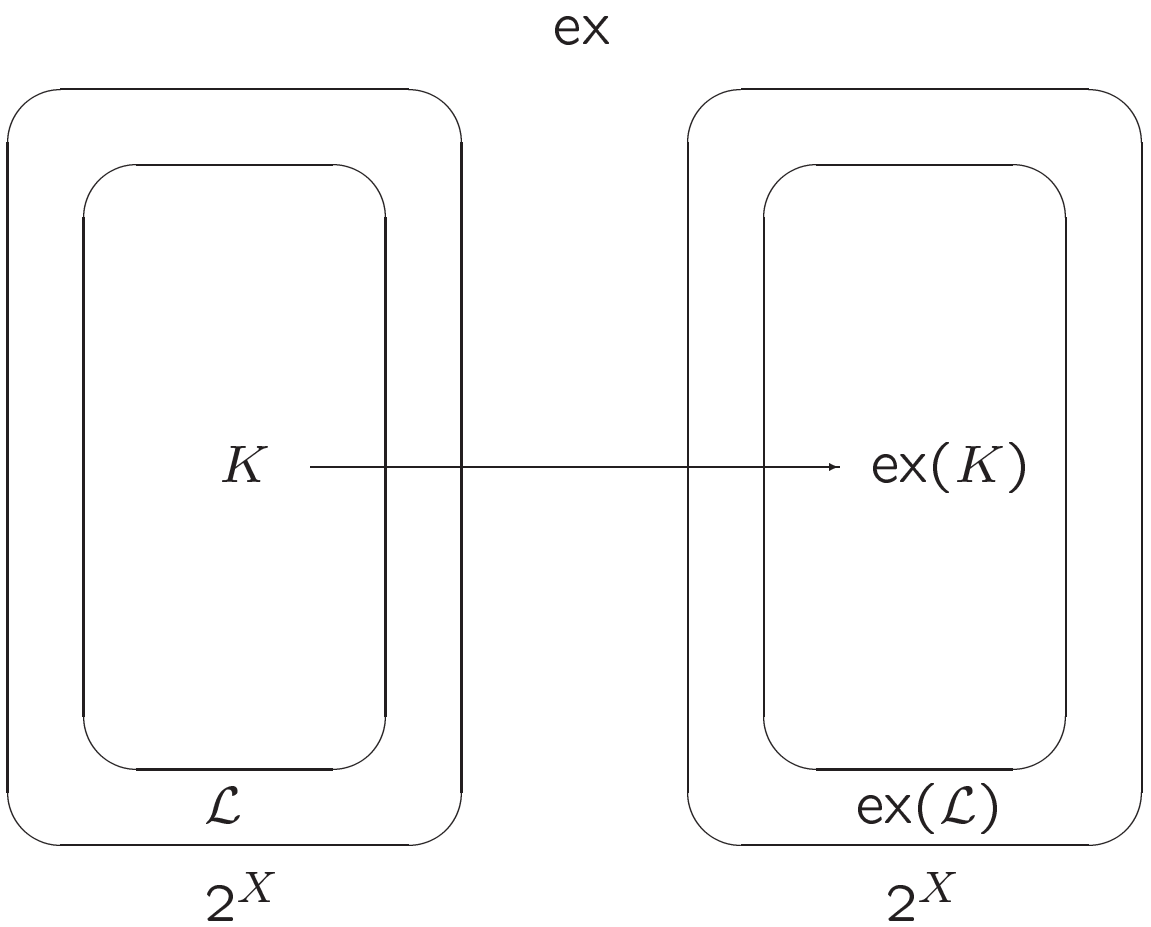
閉包空間 $(X, \mathcal{L})$ の開集合族 $\mathcal{E} \subseteq 2^X$ とは

$$\mathcal{E} = \{\, A \mid A \subseteq X, \mathrm{ex}(A) = A \,\}$$

であったから，命題 10 によって，写像 $\mathrm{ex}\colon 2^X \to \mathcal{E}$ は全射である.

Theorem 11: 閉包空間 (X, τ) が凸幾何であるための必要十分条件は，$\mathrm{ex}|_{\mathcal{L}}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{E}$ が全単射となることである. □

特徴付け（2） — $\mathrm{ex}|_{\mathcal{L}}: \mathcal{L} \to \mathcal{E}$が全単射 —



閉包空間の端点演算子による公理系

Proposition 12: (X, τ) を閉包空間とすると，その端点演算子ex: $2^X \to 2^X$ は，以下の (Ex1)–(Ex4) を満足する．

(Ex1) $\forall A \subseteq X : S(A) \subseteq A.$ (Intensionality)

(Ex2) $\forall p \in X : S(\{p\}) = \{p\}.$ (Singleton Identity)

(Ex3) $A \subseteq B \subseteq X \Longrightarrow S(B) \cap A \subseteq S(A).$ (Chernoff property)

(Ex4) $\forall A \subseteq X, \forall p, q \notin A$:
$(p \notin S(A \cup p), q \in S(A \cup q)) \Longrightarrow q \in S(A \cup p \cup q).$

Theorem 13: 写像 $S\colon 2^X \to 2^X$ に対して，(Ex1)–(Ex4) が成り立つとする．$\tau\colon 2^X \to 2^X$ を

$$\tau(A) = A \cup \{p \mid p \notin A, p \notin S(A \cup p)\} \tag{1}$$

で定義すると，(X, τ) は S を端点演算子として持つ閉包空間である．□

Theorem 14: *A mapping* $S\colon 2^X \to 2^X$ *is the extreme point operator of a closure space if and only if* S *satisfies the following* (Ex1)–(Ex4). □

凸幾何の端点演算子による公理系

Theorem 15 (A (2001)): *A mapping* $S: 2^X \to 2^X$ *is the extreme point operator of a convex geometry if and only if it satisfies*

(Ex1) $\forall A \subseteq X: S(A) \subseteq A$.

(Ex2) $\forall p \in X: S(\{p\}) = \{p\}$.

(Ex3) $A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow S(B) \cap A \subseteq S(A)$ (Chernoff).

and

(Ex5) $\forall A, B \subseteq X: S(B) \subseteq A \subseteq B \Rightarrow S(A) \subseteq S(B)$.
(Aizerman's Axiom)

□

選択関数の理論と経路独立性

関数 $S\colon 2^X \to 2^X$ は，以下の (Ex1) と (NE) を満足するとき選択関数と呼ばれる.

(Ex1) $S(A) \subseteq A \quad (A \subseteq X)$. (Intensionality)

(NE) $S(A) \neq \emptyset \quad (\emptyset \neq A \subseteq X)$. (Nonemptiness)

$S\colon 2^X \to 2^X$ に対して，以下の条件を経路独立性 (Path Independence) と呼ぶ.

(PI) $\forall A, B \subseteq X\colon S(A \cup B) = S(S(A) \cup S(B))$.

Koshevoy の結果

G. A. Koshevoy. Choice functions and abstract convex geometry. *Mathematical Social Science*, 38:35–44, 1999.

Theorem 16 (Koshevoy (1999)): *A mapping* $S: 2^X \to 2^X$ *is the extreme point operator of a convex geometry if and only if* S *is a choice function satisfying Path Independence, that is,* S *satisfies* (Ex1), (NE) *and* (PI). □

Theorem 17 (Aizerman and Malishevski): *Suppse that (Ex1) holds. Then,*

$$(\text{PI}) \Longleftrightarrow (\text{Ex3}) + (\text{Ex5}).$$

□

Remark 18: Theorem 17を用いれば, Koshevoy の条件: (Ex1)+(NE)+(PI) と Theorem 15の条件 (Ex1)+(Ex2)+(Ex3)+(Ex5) は同値であることが分かる. □

Koshevoy の結果との比較

Corollary 19: *A mapping* $S\colon 2^X \to 2^X$ *is the extreme operator of a convex geometry if and only if* S *satisfies (Ex1), (Ex2), (Ex3) and (Ex5). Furthermore, a convex geometry is uniquely determined by its extreme operator.* □

Remark 20: Koshevoy は, 選択関数 $S\colon 2^X \to 2^X$ が与えられたとき,

$$\bar{S}(A) = \bigcup\{B \mid B \subseteq X, S(B) = S(A)\} \quad (A \subseteq X)$$

で $\bar{S}\colon 2^X \to 2^X$ を定義して, もし S が Path Independence を満足するならば, $\bar{S}$ が, ある凸幾何の閉包演算子であることを示した.

Remark 21: (Ex1)–(Ex4)満足するSに対して，(1) のτは必ず閉包空間を与えるに対してKoshevoyの$\bar{S}$は閉包演算子にならないかもしれない.

しかし，もしSが凸幾何の端点演算子であるならば，Koshevoy の結果も A の結果も同一の凸幾何を与える.

マトロイドと凸幾何の公理系

公理系	マトロイド	凸幾何
閉包演算子	√	(定義)
閉集合族	√	Edelman-Jamison (1985)
独立集合族	√	?
階数関数	√	Dietrich (1989)
サーキット族	√	Dietrich (1986)
貪欲算法	√	Andrew-Faigle (1990)
基族	√	–
端点演算子	?	Koshevoy (1999), A (2001)

開集合族の性質

Proposition 22: 閉包空間(X, τ)の開集合全体からなる族$\mathcal{E}$は, 以下の(E1)–(E3)を満足する.

(E1) $\emptyset \in \mathcal{E}$.

(E2) $A \subseteq B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \in \mathcal{E}$.

(E3) $\forall p \in X : \{p\} \in \mathcal{E}$.

□

今後の研究課題

- 柏原-岡本の結果を一般化
- (Ex4) を満足するような選択関数
- マトロイドの端点演算子による特徴付け？
- 凸幾何の独立集合族 (free subsets) による特徴付け?
- ホーン理論
- 閉包空間と greedoid の関係？ (exchange system?)

何故こんな研究をしているのか？

- $P = (X, \preceq)$: partially ordered set (poset). $(n = |E|.)$

- $I \subseteq X$ is an ideal of $P \Leftrightarrow (y \preceq x \in I \Rightarrow y \in I)$.
  $\mathcal{I}(P) =$ the set of ideals of P.

Remark 23: *$\mathcal{I}(P)$ is closed under $\cup$ and $\cap$.*

- $f: \mathcal{I}(P) \to \mathbf{R}$ is *submodular* $\Leftrightarrow$

$$\forall A, B \in \mathcal{I}(P): f(A) + f(B) \geq f(A \cup B) + f(A \cap B).$$

$$\left| \begin{array}{ll} \max & \sum\{w(e)x(e) \mid e \in E\} \\ \text{s.t.} & x(I) \leq f(I) \qquad\qquad (I \in \mathcal{I}(P)), \end{array} \right.$$

where $x(A) = \sum_{e \in A} x(e)$.

Dual Greedy Algorithm

Krüger は，$f\colon \mathcal{I}(P) \to \mathbf{R}$にある種の劣モジュラ性を仮定して，

$$\left|\begin{array}{ll} \max & \sum\{w(e)x(e) \mid e \in E\} \\ \text{s.t.} & x(\mathrm{ex}(I)) \le f(I) \qquad (I \in \mathcal{I}(P)) \end{array}\right.$$

に対する双対貪欲算法の有効性を示した.

(X, τ)を凸幾何，$\mathcal{L}$ をその閉集合族，exをその端点演算子とする．Krügerの結果を一般化して，Kashiwabara-Okamotoは，$f\colon \mathcal{L} \to \mathbf{R}$をある種の劣モジュラ性を仮定して，

$$\left|\begin{array}{ll} \max & \sum\{w(e)x(e) \mid e \in E\} \\ \text{s.t.} & x(\mathrm{ex}(I)) \le f(I) \qquad (I \in \mathcal{L}) \end{array}\right.$$

に対する双対貪欲算法の有効性を示した.

合理化可能な選択関数

$\preceq$をX上の選好順序とする.

$$S(A, \preceq) = \{p \mid p \in A, \nexists q \in A : p \prec q\} \quad (A \subseteq X)$$

と定義する. つまり, $S(A, \preceq)$はAの中の$\preceq$に関して極大な元全体である. 選択関数Sに対して, もしあるX上の選好順序$\preceq$が存在して$S(A) = S(A, \preceq)$ $(A \in 2^X)$となるならば, Sは合理化可能であると呼ばれる.

選好順序のタイプ	(Ex3)	Expansion	(Ex5)	Arrow
Acyclic	$\surd$	$\surd$		
Pseudo-rationalizability	$\surd$		$\surd$	
Quasi-transitive	$\surd$	$\surd$	$\surd$	
Preorder	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$

(Arrow): $(A \subseteq B, S(B) \cap A \neq \emptyset) \Longrightarrow S(B) \cap A = S(A)$.

(Expansion): $S(A) \cap S(B) \subseteq S(A \cup B)$.

References

[1] M. A. Aizerman and A. V. Malishevski. General theory of best variants choice: some aspects. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26:1030–1040, 1981.

[2] H. Chernoff. Rational choice functions and orderings. *Econometrica*, 22:121–127, 1954.

[3] M. R. Johnson and R. A. Dean. Locally complete path independent choice functions and their lattices. *Mathematical Social Science*, 42(1):53–87, 2001.

[4] P. Edelman and R. Jamison. Theory of convex geometries. *Geometriae Dedicata*, 19:247–270, 1985.

[5] K. Kashiwabara and Y. Okamoto. A greedy algorithm for convex geometries. Discrete Applied Mathematics (to appear).

[6] G. A. Koshevoy. Choice functions and abstract convex geometry. *Mathematical Social Science*, 38:35–44, 1999.

[7] H. Moulin. Choice functions over a finite set: A summary. *Social Choice and Welfare*, 2:147–160, 1985.