相互評価の下での不可能性定理

安藤 和敏

ando@sys.eng.shizuoka.ac.jp

静岡大学工学部

今日の話は, 以下の論文に基づいています.

安藤和敏, 小原朱理, 山本芳嗣: 相互評価の下での不可能性定理. *Journal of the Operations Research Society of Japan* **46** (2003) 523-533.

今日の話の概要

1. 古典的社会選択理論
   (a) Arrow の不可能性定理
   (b) Hansson の不可能性定理
2. 相互評価の枠組
   (a) Pareto 原理と不可能性定理
   (b) 弱 Pareto 原理と不可能性定理
   (c) 非抑圧性と不可能性定理

1. 古典的社会選択理論
   (a) Arrow の不可能性定理
   (b) Hansson の不可能性定理
2. 相互評価の枠組
   (a) Pareto 原理と不可能性定理
   (b) 弱 Pareto 原理と不可能性定理
   (c) 非定値性と不可能性定理

選好プロファイル

$N = \{1, 2, 3, 4\}$ ある社会(グループ),
$X = \{x, y, z, w\}$ 代替案の集合

1	x	$\succ$	y	$\succ$	z	$\succ$	w
2	w	$\succ$	x	$\simeq$	y	$\succ$	z
3	y	$\simeq$	x	$\succ$	z	$\succ$	w
4	y	$\succ$	x	$\simeq$	w	$\succ$	z

上のように, 各個人の選好順序を並べた表を選好プロファイルと呼ぶ.

社会厚生関数

社会厚生関数とは, 選好プロファイルが与えられたときに, その社会としての選好順序 $\preceq$ を返す関数のこと.

1	x	$\succ$	y	$\succ$	z	$\succ$	w
2	w	$\succ$	x	$\simeq$	y	$\succ$	z
3	y	$\simeq$	x	$\succ$	z	$\succ$	w
4	y	$\succ$	x	$\simeq$	w	$\succ$	z

$$f \downarrow$$

$$x \succ y \simeq z \succ w$$

弱順序

(i) $\forall x \in X : x \preceq x$. (反射性)

(ii) $\forall x, y \in X : x \preceq y$ or $y \preceq x$. (完備性)

(iii) $\forall x, y, z \in X : x \preceq y \preceq z \Longrightarrow x \preceq z$. (推移性)

各個人の持つ選好順序と社会としての選好順序は弱順序を仮定する.

無差別と狭義の選好

$x, y \in X$ に対して $x \preceq y$ かつ $y \preceq x$ であるときに $x \simeq y$ と定義し, $x \preceq y$ かつ $y \npreceq x$ のときに $x \prec y$ と定義する.

1. 古典的社会選択理論
   (a) Arrow の不可能性定理
   (b) Hansson の不可能性定理
2. 相互評価の枠組
   (a) Pareto 原理と不可能性定理
   (b) 弱 Pareto 原理と不可能性定理
   (c) 非定値性と不可能性定理

定義域の非限定性 (U)

社会的厚生関数 f は, 任意の選好プロファイルに対して社会としての選好順序を決定する.
つまり, 社会の各構成員がどのような選好順序を表明しても, 社会としての選好順序が決定される.

無関係対象からの独立性 (I)

もし２つの選好プロファイル P, P' に関して, 選択肢 $x, y \in X$ に対する選好順序が一致しているのならば, P に対して定まる社会的な選好順序の x, y に対する順序は, P' に対して定まる社会的な選好順序の x, y に対する順序と一致する.

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & \multicolumn{7}{c}{P} \\
1 & x & \succ & y & \succ & z & \succ & w \\
2 & w & \succ & x & \simeq & y & \succ & z \\
3 & y & \simeq & x & \succ & z & \succ & w \\
4 & y & \succ & x & \simeq & w & \succ & z \\
 & \multicolumn{7}{c}{f\downarrow} \\
 & x & \succ & y & \simeq & z & \succ & w
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccccccc}
 & \multicolumn{7}{c}{P'} \\
1 & x & \succ & z & \succ & w & \succ & y \\
2 & w & \succ & z & \succ & x & \simeq & y \\
3 & w & \succ & y & \simeq & x & \succ & z \\
4 & y & \succ & w & \succ & x & \succ & z \\
 & \multicolumn{7}{c}{f\downarrow} \\
 & x & \succ & z & \succ & w & \succ & y
\end{array}
$$

Pareto原理 (P)

もし, 全ての個人kが, $x \prec y$という選好順序を持つのであれば, 社会としての選好順序も$x \prec y$となる.

1	x	$\succ$	y	$\succ$	z	$\succ$	w
2	w	$\simeq$	x	$\succ$	y	$\succ$	z
3	z	$\simeq$	w	$\succ$	x	$\succ$	y
4	x	$\succ$	z	$\simeq$	w	$\succ$	y

$$f \downarrow$$

$$x \succ z \simeq y \succ w$$

非独裁性 (ND)

以下のような, 個人 $k \in N$ は存在しない.
任意の $x, y\ (x \neq y)$ に対して, k が $x \prec y$ という選好順序を持つと, 社会的な選好順序に関しても $x \prec y$ となる.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
1 & x & \succ & y & \succ & z & \succ & w \\
2 & w & \simeq & x & \succ & y & \succ & z \\
3 & z & \simeq & w & \succ & x & \succ & y \\
4 & x & \succ & z & \simeq & w & \succ & y
\end{array}
$$

$$
f \downarrow
$$

$$
x \succ z \simeq w \succ y
$$

Arrow の不可能性定理

$$\left\{\begin{array}{l}\text{(U) 定義域の非限定性,}\\ \text{(I) 無関係対象からの独立性,}\\ \text{(P) Pareto 原理,}\\ \text{(ND) 非独裁制}\end{array}\right\}$$

の全てを満足する社会厚生関数は存在しない.

1. 古典的社会選択理論
   (a) Arrow の不可能性定理
   (b) Hansson の不可能性定理
2. 相互評価の枠組
   (a) Pareto 原理と不可能性定理
   (b) 弱 Pareto 原理と不可能性定理
   (c) 非定値性と不可能性定理

非抑圧性 (NS)

以下のような，個人 $k \in N$ は存在しない.
任意の $x, y\ (x \neq y)$ に対して, k が $x \prec y$ という選好順序を持つと, 社会的な選好順序に関しては $x \succ y$ となる.

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
1 & x & \succ & y & \succ & z & \succ & w \\
2 & w & \simeq & x & \succ & y & \succ & z \\
3 & z & \simeq & w & \succ & x & \succ & y \\
4 & x & \succ & z & \simeq & w & \succ & y
\end{array}
$$

$$
f \downarrow
$$

$$
y \succ w \succ z \succ x
$$

非定値性 (NC)

以下のような, 選択肢 x, y $(x \neq y)$ は存在しない.

- どのような選好プロファイルに対しても, 社会的な順序はこの x, y に対して一定の選好順序 $x \prec y$ を与えるか, あるいは,
- どのような選好プロファイルに対しても, 社会的な順序は, この x, y に対して一定の選好順序 $x \simeq y$ を与える.

1	2	$\succ$	3	$\succ$	4
2	4	$\simeq$	1	$\succ$	3
3	4	$\succ$	1	$\succ$	2
4	1	$\succ$	3	$\simeq$	2

$f \downarrow$

$1 \succ 3 \simeq 2 \succ 4$

1	3	$\succ$	2	$\simeq$	4
2	1	$\succ$	4	$\succ$	3
3	2	$\simeq$	1	$\succ$	4
4	3	$\simeq$	2	$\simeq$	1

$f \downarrow$

$1 \simeq 4 \simeq 3 \succ 2$

Hansson の不可能性定理

$$\left\{\begin{array}{l}\text{(U) 定義域の非限定性,}\\ \text{(I) 無関係対象からの独立性,}\\ \text{(NS) 非抑圧性,}\\ \text{(NC) 非定値性,}\\ \text{(ND) 非独裁制}\end{array}\right\}$$

の全てを満足する社会厚生関数は存在しない.

まとめ

(U)	√	√
(I)	√	√
(P)	√	
(NS)		√
(NC)		√
(ND)	√	√
	存在しない	存在しない

1. 古典的社会選択理論
   (a) Arrow の不可能性定理
   (b) Hansson の不可能性定理
2. 相互評価の枠組
   (a) Pareto 原理と不可能性定理
   (b) 弱 Pareto 原理と不可能性定理
   (c) 非定値性と不可能性定理

選好プロファイル

$N = \{1, 2, 3, 4\}$ ある社会(グループ)
各 $i = 1, 2, 3, 4$ が自分を除いた全ての構成員を順序付ける.

1	2	$\succ$	3	$\succ$	4
2	4	$\succ$	1	$\succ$	3
3	2	$\simeq$	1	$\succ$	4
4	2	$\succ$	1	$\simeq$	3

選好プロファイルは, 各個人 k の $N \setminus \{k\}$ 上の選好順序を並べた表になる.

相互評価における社会厚生関数

社会厚生関数とは, 選好プロファイルが与えたれたときに, その社会としての N 上の選好順序 $\preceq$ を返す関数のこと.

1	2	$\succ$	3	$\succ$	4
2	4	$\succ$	1	$\succ$	3
3	2	$\simeq$	1	$\succ$	4
4	2	$\succ$	1	$\simeq$	3

$$f \downarrow$$

$$x \succ y \simeq z \succ w$$

1. 古典的社会選択理論
   (a) Arrow の不可能性定理
   (b) Hansson の不可能性定理
2. 相互評価の枠組
   (a) Pareto 原理と不可能性定理
   (b) 弱 Pareto 原理と不可能性定理
   (c) 非定値性と不可能性定理

(U) 定義域の非限定性

社会的厚生関数 f は, 任意の選好プロファイルに対して社会としての選好順序を決定する.
つまり, 社会の各構成員 $i \in N$ がどのような $N \setminus \{i\}$ 上の選好順序を表明しても, 社会としての選好順序が決定される.

(I) 無関係対象からの独立性

もし２つの選好プロファイル P, P' に関して，選択肢 $i, j \in X$ に対する選好順序が i と j を除いた各個人について一致しているのならば，P に対して定まる社会的な選好順序の i, j に対する順序は，P' に対して定まる社会的な選好順序の i, j に対する順序と一致する．

1	2	$\succ$	3	$\succ$	4	
2	4	$\succ$	1	$\succ$	3	
3	2	$\simeq$	1	$\succ$	4	
4	2	$\succ$	1	$\simeq$	3	

$f \downarrow$

$1 \succ 2 \simeq 3 \succ 4$

1	3	$\succ$	4	$\succ$	2	
2	4	$\succ$	3	$\succ$	1	
3	4	$\succ$	2	$\simeq$	2	
4	2	$\succ$	1	$\succ$	3	

$f \downarrow$

$1 \succ 3 \succ 4 \succ 2$

(P) Pareto 原理

もし, i と j を除いた全ての個人が, $i \prec j$ という選好順序を持つのであれば, 社会としての選好順序も $i \prec j$ となる.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
1 & 2 & \succ & 3 & \succ & 4 \\
2 & 4 & \simeq & 1 & \succ & 3 \\
3 & 4 & \succ & 1 & \succ & 2 \\
4 & 1 & \succ & 3 & \simeq & 2
\end{array}
$$

$$
f \downarrow
$$

$$
1 \succ 3 \simeq 2 \succ 4
$$

定理 1 [AOY]

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(U) 定義域の非限定性,} \\ \text{(P) Pareto 原理} \end{array} \right\}$$

を満足する社会厚生関数は存在しない.

1. 古典的社会選択理論
   (a) Arrow の不可能性定理
   (b) Hansson の不可能性定理
2. 相互評価の枠組
   (a) Pareto 原理と不可能性定理
   (b) 弱 Pareto 原理と不可能性定理
   (c) 非定値性と不可能性定理

弱Pareto原理 (WP)

もし, i と j を除いた各個人 k が, $i \prec j$ という選好順序を持つのであれば, 社会としての選好順序は $i \preceq j$ となる.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
1 & 2 & \succ & 3 & \succ & 4 \\
2 & 4 & \simeq & 1 & \succ & 3 \\
3 & 4 & \succ & 1 & \succ & 2 \\
4 & 1 & \succ & 3 & \simeq & 2
\end{array}
$$

$$
f \downarrow
$$

$$
1 \simeq 3 \simeq 2 \succ 4
$$

定理 2 [AOY]

社会厚生関数が,

$$\left\{\begin{array}{l}\text{(U) 定義域の非限定性,}\\ \text{(I) 無関係対象からの独立性,}\\ \text{(WP) 弱 Pareto 原理}\end{array}\right\}$$

満足するならば, どのような選好プロファイルに対しても, 社会としての選好は全ての構成員を無差別にする: $1 \simeq 2 \simeq 3 \simeq 4$.

1. 古典的社会選択理論
   (a) Arrow の不可能性定理
   (b) Hansson の不可能性定理
2. 相互評価の枠組
   (a) Pareto 原理と不可能性定理
   (b) 弱 Pareto 原理と不可能性定理
   (c) 非定値性と不可能性定理

非定値性 (NC)

以下のような, 個人$i, j \in N$は存在しない.

- どのような選好プロファイルに対しても, 社会的な順序は, このi, jに対して同じ選好順序$i \prec j$を与えるか, あるいは,
- どのような選好プロファイルに対しても, 社会的な順序は, このi, jに対して同じ選好順序$i \simeq j$を与える.

1	2	$\succ$	3	$\succ$	4	
2	4	$\simeq$	1	$\succ$	3	
3	4	$\succ$	1	$\succ$	2	
4	1	$\succ$	3	$\simeq$	2	

$f \downarrow$

$1 \succ 3 \simeq 2 \succ 4$

1	3	$\succ$	2	$\simeq$	4	
2	1	$\succ$	4	$\succ$	3	
3	2	$\simeq$	1	$\succ$	4	
4	3	$\simeq$	2	$\simeq$	1	

$f \downarrow$

$1 \simeq 4 \simeq 3 \succ 2$

定理 3 [AOY]

$$\left\{\begin{array}{l}\text{(U) 定義域の非限定性,}\\ \text{(I) 無関係対象からの独立性,}\\ \text{(NC) 非定値性}\end{array}\right\}$$

の全てを満足する社会厚生関数は存在しない.

まとめ

(U)	√	√	√
(I)		√	√
(P)	√		
(WP)		√	
(NC)			√
	存在しない	全て無差別	存在しない