Faigle-Kern の双対貪欲算法とその帰結

静岡大学大学院 工学研究科 システム工学専攻 安藤研究室 1234-5678 安藤 和敏

2003 年 7 月 28 日

1. はじめに

$P=(E,\preceq)$ を半順序集合とする．ここで, E は有限集合である．部分集合 $A\subseteq E$ は, もし「任意の $a,b\in A$ に対して, $a\preceq b$ が $a=b$ を意味する」とき P の**反鎖**と呼ばれる．$P=(E,\preceq)$ の反鎖全体を $\mathcal{A}(P)$ で表わす．

$f\colon\mathcal{A}(P)\to\mathbb{R}$ として, 以下の線型計画問題を考える:

$$\text{(LP)}\left|\begin{array}{ll}\text{Max} & \displaystyle\sum_{e\in E}c(e)x(e)\\ \text{s.t.} & x(A)\le f(A)\quad (A\in\mathcal{A}(P))\end{array}\right.$$

ここで, 各 $X\subseteq E$ に対して $x(X)=\sum_{e\in X}x(e)$ である．Faigle and Kern [1, 2] は (LP) に対して双対貪欲算法を提案し, ある条件のもとでその算法の有効性を示した．その後, Krüger [3] によって, 双対貪欲算法はより一般的な条件のもとで有効であることが示された．その条件というのが, $f\colon\mathcal{A}(P)\to\mathbb{R}$ の b-劣モジュラ性である．

本発表においては, f が b-劣モジュラであるときに, 与えられたベクトルが $x(A)\le f(A)$ $(A\in\mathcal{A}(P))$ で定義される多面体の端点かどうかを判定するアルゴリズムを示す．さらに, 関数 $f\colon\mathcal{A}(P)\to\mathbb{R}$ に対して Lovász 拡張という概念を導入し, f の b-劣モジュラ性をその Lovász 拡張の凸性によって特徴付ける．

2. 双対貪欲算法

各部分集合 $X\subseteq E$ に対して, $\mathrm{id}(X)$ を

$$\mathrm{id}(X)=\{y\mid y\in E,\exists x\in X\colon y\preceq x\}$$

で定義し, $\max(X)$ を

$$\max(X)=\{x\mid x\in X,\nexists y\in X\colon x\prec y\}$$

で定義する．$P=(E,\preceq)$ の反鎖全体 $\mathcal{A}(P)$ は, 以下で定義される束演算 $\vee$ と $\wedge$ によって分配束を成す:

$$\begin{aligned}A\vee B &= \max(\mathrm{id}(A)\cup\mathrm{id}(B)),\\ A\wedge B &= \max(\mathrm{id}(A)\cap\mathrm{id}(B)).\end{aligned}$$

関連する $\mathcal{A}(P)$ 上の半順序 $\preceq$ は, $A,B\in\mathcal{A}(P)$ に対して「任意の $a\in A$ に対して $a\le b$ なる $b\in B$ が存在する」とき, $A\preceq B$ と定義される．

問題 (LP) は常に実行可能であり, 最適解を持つための必要十分条件は $c\in\mathbb{R}^E_+$ である事を見るのは容易である．

$c\in\mathbb{R}^E_+$ とする．Faigle and Kern [1] は問題 (LP) を解くための以下のアルゴリズム Dual Greedy を提案した．さらに, $P=(E,\preceq)$ が根付き森で, かつ, $f\colon\mathcal{A}(P)\to\mathbb{R}$ が**劣モジュラ**であるときにこのアルゴリズムが有効であることを示した．ここで, 関数 $f\colon\mathcal{A}(P)\to\mathbb{R}$ が劣モジュラであるとは, 任意の $A,B\in\mathcal{A}(P)$ に対して

$$f(A)+f(B)\ge f(A\vee B)+f(A\wedge B)$$

が成り立つことをいう．

その後, Krüger [3] は, f に関するより弱い条件「任意の $A,B\in\mathcal{A}(P)$ に対して

$$f(A)+f(B)\ge f(A\vee B)+f(A\sqcap B)\qquad(1)$$

が成り立つ」のもとで Dual Greedy が有効であることを示した．(半順序集合 $P=(E,\preceq)$ は任意で良い．) ここで,

$$A\sqcap B=(A\wedge B)\cap(A\cup B)$$

である．我々は, 任意の $A,B\in\mathcal{A}(P)$ に対して (1) を満足する関数を *b-劣モジュラ*と呼ぼう．

Algorithm 1 Dual Greedy

```
y* ← 0.
for i = n downto 1 do
    Choose e_i ∈ max(E) such that
    c(e_i) = min{c(e) | e ∈ max(E)}.
    A_i ← max E.
    y*(A_i) ← c(e_i).
    c(e) ← c(e) − c(e_i)   (e ∈ max(E)).
    E ← E − {e_i}.
end for
Define x* as the unique solution of the system

    x(A_i) = f(A_i)   (i = 1, ..., n)

of equations.
```

3. 端点判定のアルゴリズム

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(f)\\ &\quad=\ \{x\in\mathbb{R}^E\mid\forall A\in\mathcal{A}(P)\colon x(A)\le f(A)\},\end{aligned}$$

とする．この節では, 与えられた任意のベクトルが $\mathrm{P}(f)$ の端点であるかどうかを判定する $\mathrm{O}(|E|^2)$ 時間のアルゴリズムを示す．このアルゴリズムの正当性は, 次の定理に強く依存している．

定理 3.1 (Krüger [3]): ベクトル $x\in\mathbb{R}^E$ が, $\mathrm{P}(f)$ の端点であるための必要十分条件は, 長さ $n=|E|$ の $\mathcal{A}(P)$ における鎖

$$\mathcal{C}\colon\emptyset=A_0\prec A_1\prec\cdots\prec A_n=\max(E)$$

が存在して, $i=1,\cdots,n$ に対して $x(A_i)=f(A_i)$ となることである. □

部分集合 $X \subseteq E$ に対して, $\min(X)$ を

$$\min(X)=\{x \mid x \in X, \nexists y \in X\colon y \prec x\}.$$

で定義する.

補題 3.2: $A \in \mathcal{A}(P)-\{\max(E)\}$ とする. $B \in \mathcal{A}(P)$ が A のカバーであるための必要十分条件は, ある $e \in \min(E-\mathrm{id}(A))$ が存在して $B=A \vee e$ となることである. □

補題 3.3: ベクトル x が $\mathrm{P}(f)$ の端点であるとする. 各 $A \in \mathcal{A}(P)-\{\max(E)\}$ で $x(A)=f(A)$ なるものに対して, $x(A \vee e)=f(A \vee e)$ となる $e \in \min(E-\mathrm{id}(A))$ が存在する. □

上の補題によって, 以下のアルゴリズム Extreme の正当性が保証される.

Algorithm 2 Extreme

```
A ← ∅.
while ∃e ∈ min(E − id(A)) such that x(A ∨ e) = f(A ∨ e) do
  A ← A ∨ e.
end while
if A = max(E) then
  return YES.
else
  return NO.
end if
```

定理 3.4: アルゴリズム *Extreme* は正当であり, その計算時間は $\mathrm{O}(|E|^2)$ である. ここで, f に対する関数評価オラクルを仮定している. □

4. Lovász 拡張

この節では, 任意の関数 $f\colon \mathcal{A}(P) \to \mathbb{R}$ の $\mathbb{R}_+^E$ への拡張を定義し, b-劣モジュラ性をその拡張の凸性によって特徴付ける.

補題 4.1: 任意の $c\colon E \to \mathbb{R}_+$ に対して, $P=(E,\preceq)$ の非空な反鎖からなる鎖

$$\mathcal{C}\colon A_1 \prec A_2 \prec \cdots \prec A_k$$

と $\lambda_i > 0$ $(i=1,\cdots,k)$ が一意的に存在して

$$c=\lambda_1\chi_{A_1}+\lambda_2\chi_{A_2}+\cdots+\lambda_k\chi_{A_k}, \tag{2}$$

となる. ここで, $k \geq 0$ である. □

$f\colon \mathcal{A}(P) \to \mathbb{R}$ を任意の関数とする. $c\colon E \to \mathbb{R}_+$ に対して,

$$\hat{f}(c)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f(A_i), \tag{3}$$

と定義する. ここで, c は (2) のように一意に表現されているとする. このようにして定義された関数 $\hat{f}\colon \mathbb{R}_+^E \to \mathbb{R}$ は, $f\colon \mathcal{A}(P) \to \mathbb{R}$ の拡張になっている. 我々は $\hat{f}$ を f の **Lovász 拡張** と呼ぼう.

定理 4.2: f の *Lovász* 拡張 $\hat{f}$ が凸であるための必要十分条件は f が b-劣モジュラであることである. □

参考文献

[1] U. Faigle and W. Kern: Submodular linear programs on forests. *Mathematical Programming* **72** (1996) 195–206.

[2] U. Faigle and W. Kern: On the core of ordered submodular cost games. *Mathematical Programming* **87** (2000) 483–499.

[3] U. Krüger: Structural aspects of ordered polymatroids. *Discrete Applied Mathematics* **99** (2000) 125–148.