# グラフとネットワーク(第6回)

http://coconut.sys.eng.shizuoka.ac.jp/gn/

安藤和敏
静岡大学工学部

2004.11.11

## 1.1. 連結性

まず最初にことわっておくが, このレジュメに書かれている 2 連結, 3 連結, $k$ 連結の定義は教科書に書かれているものとは異なっていることに注意しておく.

### 1.1.1. 連結性

グラフ $G = (V, A)$ (無向でも有向でも良い) に対して, $G$ の任意の 2 点 $u$ と $v$ に対して, $u$ から $v$ への道が存在するとき, $G$ は**連結である** (connected) といい, $G$ を**連結なグラフ** (connected graph) と呼ぶ. 与えられたグラフが連結か否かの判定は, DFS か BFS を用いて簡単にできる. [1] 必ずしも連結でないグラフ $G = (V, A)$ に対して, その極大な連結部分グラフを $G$ の**連結成分** (connected component) と呼ぶ. ここで, $H$ が $G$ の**極大な連結部分グラフ**であるとは,

(i) $H$ は $G$ の連結な部分グラフであり,

(ii) $H$ を部分グラフとして**真に**含むような $G$ の連結部分グラフは存在しない

ということである.

### 1.1.2. 2 連結性

グラフ $G = (V, A)$ と点部分集合 $U \subseteq V$ に対して, $V \setminus U$ で誘導される部分グラフ (⇒ 教科書 p.6) $G[V \setminus U]$ を, $G \setminus U$ と表す. つまり,

$G \setminus U = G$ から, $U$ と $U$ の中の点に接続する枝を開放除去したグラフ

である. $U$ が 1 点からなる集合のとき, 例えば $U = \{v\}$ のときは, $G \setminus \{v\}$ と書く代りに $G \setminus v$ と書く.

[1] 小さいグラフであれば, 人間は図を描くことによって, 直感的に判定することができるが, 点の数が 100 以上枝の数が 1000 以上のグラフともなると, 人間の直観は役に立たないであろう.

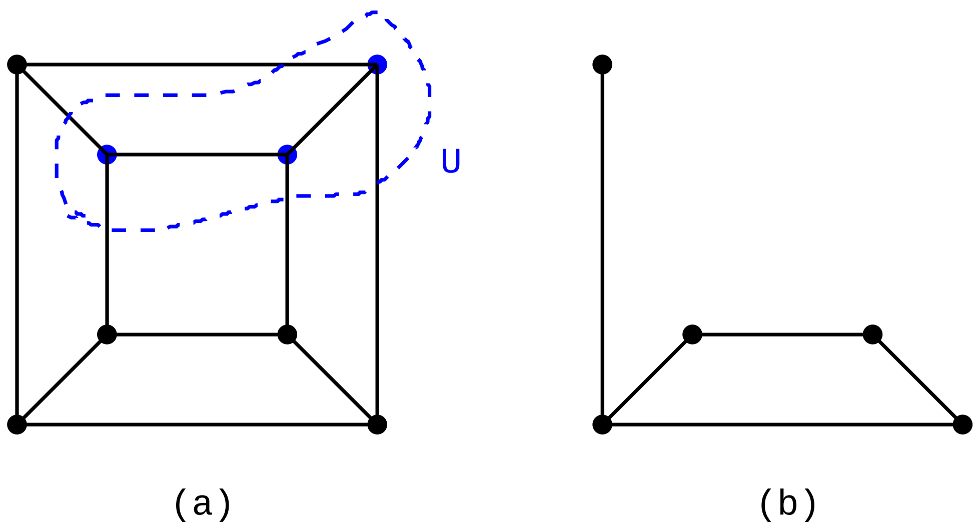


図 1.1: (a) $G$ と $U \subseteq V$ (b) $G \setminus U$

$G=(V,A)$ を連結なグラフとする. $G \setminus v$ が連結でなくなるような点 $v$ を**関節点** (articulation vertex) と呼ぶ. 関節点が存在しないとき, そのグラフは **2 連結** (2-connected) と呼ばれる. つまり, どの 1 点 (とそれに接続する枝たち) を除去しても連結なグラフが, 2 連結グラフである.

**例 1.1**: 図 *1.1* のグラフ $G$ は*, 2* 連結である*.*

連結なグラフ $G=(V,A)$ に対して, その極大な 2 連結部分グラフを $G$ の **2 連結成分** (2-connected component) と呼ぶ.

### 1.1.3. 3 連結性, 4 連結性,$\cdots$,$k$ 連結性

$G=(V,A)$ を 2 連結なグラフとする. $G$ のどんな 2 点 $u,v$ に対しても, $G \setminus \{u,v\}$ が連結であるとき, $G$ は **3 連結である** (3-connected) という. つまり, どんな 2 点 (とそれらに接続する枝たち) を除去しても連結なグラフが 3 連結グラフである.

**例 1.2**: 図 *1.1* のグラフ $G$ は*, 3* 連結である*.*

一般の $k \geq 4$ に対しても同様に, $G=(V,A)$ の $k$ 連結性が定義される.

$|U|<k$ であるどのような点部分集合 $U$ に対しても, $G \setminus U$ が連結であるときに, $G$ を $k$ **連結な**グラフという. つまり, どんな $l<k$ 点 (とそれらに接続する枝たち) を除去しても連結なグラフが $k$ 連結グラフである.

**例 1.3**: 図 *1.1* のグラフ $G$ は*, 4* 連結でない*.* なぜか*?*

### 1.1.4. $k$ 枝連結性

グラフ $G$ は, $G$ のどんな $k-1$ 本以下の枝を開放除去しても連結であるときに, $k$ **枝連結** ($k$-edge connected) と呼ばれる.

$k$ 連結は, 枝連結との区別を強調して, $k$ **点連結**とも呼ばれる.

**例 1.4**: 図 *1.1* のグラフ $G$ は, *2* 枝連結, *3* 枝連結であるが, *4* 枝連結ではない.

### 1.1.5. 強連結性

(有向) グラフ $G = (V, A)$ において, 任意な点から任意な点への有向道が存在するとき, $G$ は**強連結** (strongly connected) という.

**例 1.5**: 図 *1.2* の *(a)* は強連結なグラフであるが, *(b)* は強連結ではない. □

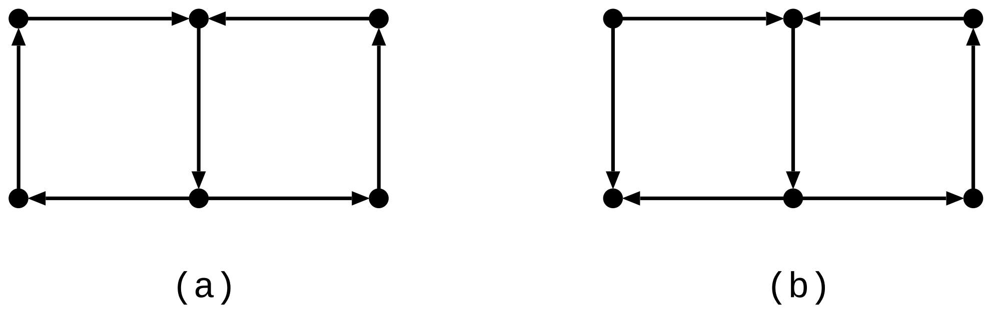


図 1.2: (a) 強連結なグラフ; (b) そうでないグラフ

(強連結でないかも知れない) グラフ $G$ に対して, $G$ の極大な強連結部分グラフを $G$ の**強連結成分** (strongly connected component) という.

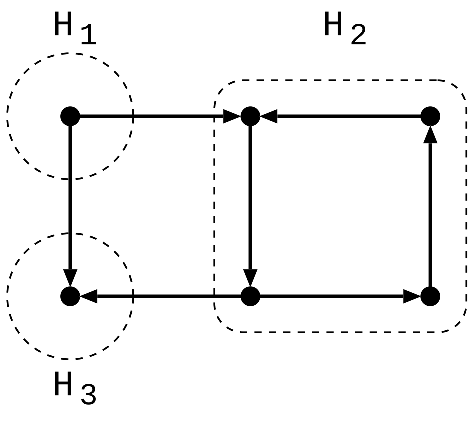


図 1.3: 強連結成分 $H_1, H_2, H_3$

**例 1.6**: 図 *1.2* の *(b)* で表されるグラフの強連結成分は, 点線で囲まれた部分グラフ $H_1, H_2, H_3$ である. □

直前の例から分かるように, グラフ $G = (V, A)$ の強連結成分を $H_i = (W_i, B_i)$ $(i \in I)$ としたとき, $\{W_i \mid i \in I\}$ は $V$ の分割になっている. (つまり, $V = \bigcup_{i \in I} W_i$, かつ, 相異なる $i, j$

に対して $W_i \cap W_j = \emptyset$.）一方で, 枝集合に対しては, 相異なる $i, j$ に対して, $B_i \cap B_j = \emptyset$ であるが, $A \neq \bigcup_{i \in I} B_i$ である.

2 つの (等しいかもしれない) 強連結成分 $H_i$ と $H_j$ に対して, $H_j$ の点から $H_i$ の点へ有向道が存在するときに

$$H_i \preceq H_j$$

という記号を使って表現しよう. すると, $\preceq$ には以下の性質がある.

(i) $H_i \preceq H_i \quad (i \in I)$,

(ii) $H_i \preceq H_j$ かつ $H_j \preceq H_i$ ならば $H_i = H_j$,

(iii) $H_i \preceq H_j$ かつ $H_j \preceq H_k$ ならば $H_i \preceq H_k$.

### 1.1.6. 半順序集合とそのハッセ図

一般に (i)〜(iii) を満足する 2 項関係 $\preceq$ は**半順序** (partial order) と呼ばれる. このとき, 対 $\mathcal{H} = (\{H_i \mid i \in I\}, \preceq)$ は, **半順序集合** (partially ordered set) と呼ばれる.

$H_i \preceq H_j$ かつ $H_i \neq H_j$ であるときに, $H_i \prec H_j$ と書く. 一般の半順序集合 $\mathcal{H} = (\{H_i \mid i \in I\}, \preceq)$ が与えられたときに, 有向グラフを以下のように構成しよう. 点集合は $\{H_i \mid i \in I\}$ で,

$$H_i \prec H_j,\ \text{かつ},\ H_i \prec H_k \prec H_j\ \text{であるような}\ H_k\ \text{は存在しない}$$

ときに, $H_j$ から $H_i$ への枝を張る. このグラフを, $H_i \prec H_j$ のときに $H_j$ は $H_i$ より上にあるように描いたものを**ハッセ図** (Hasse diagram) という. ハッセ図においては, 上下関係で枝の向きが表現できるので, 無向グラフとして描く.

**例 1.7**: *$X$ を有限集合として, $X$ の 2 つの部分集合の間の包含関係 $\subseteq$ は, 半順序である. 図 1.4 は, 半順序集合 $(2^X, \subseteq)$ のハッセ図である.* □

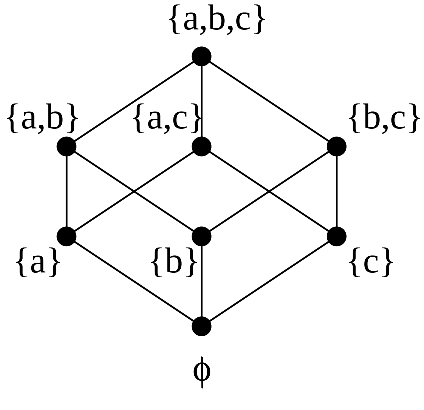


図 1.4: 半順序集合 $(2^X, \subseteq)$ のハッセ図. ここで, $X = \{a, b, c\}$.