

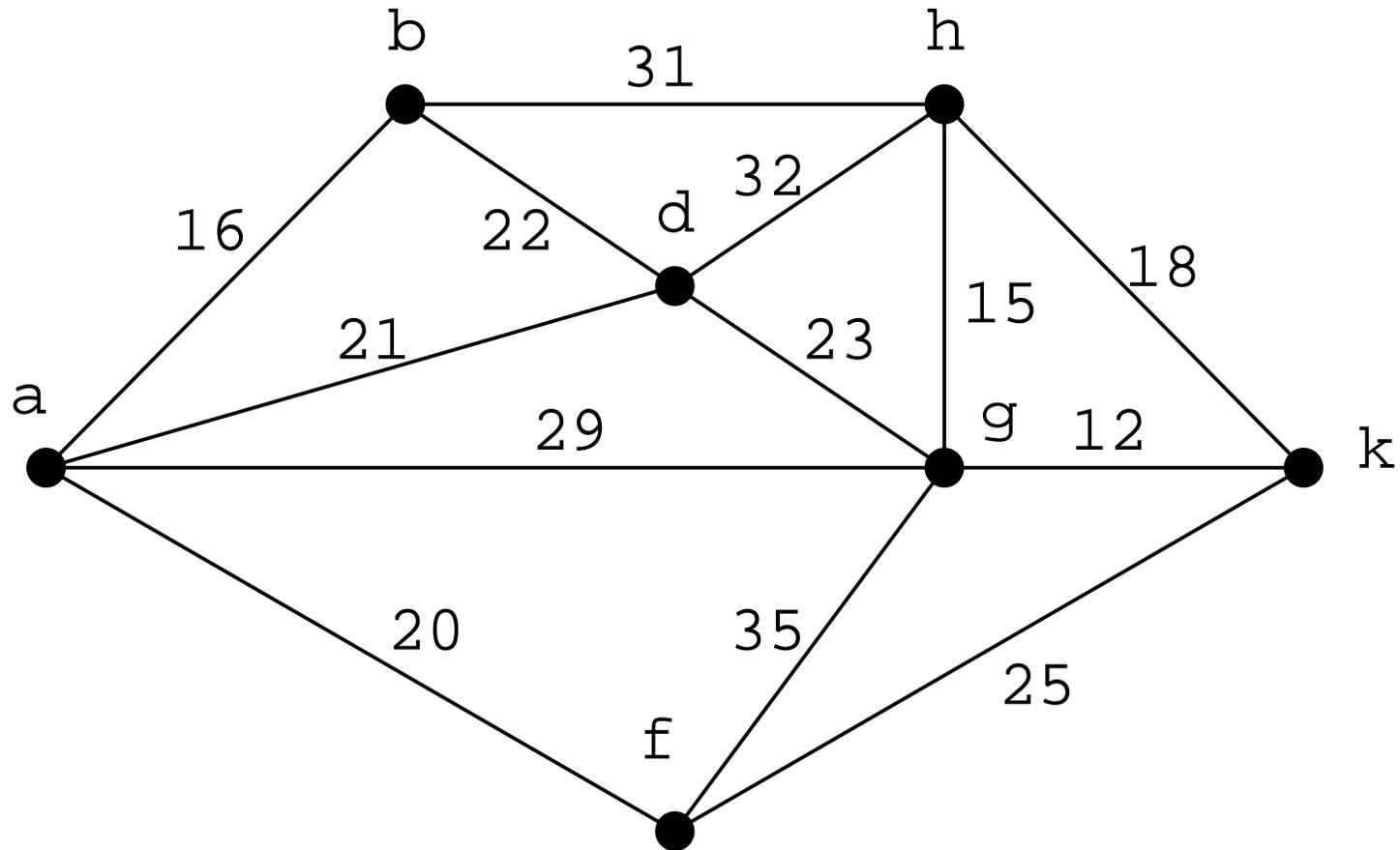
グラフとネットワーク (第9回)

安藤 和敏

ando@sys.eng.shizuoka.ac.jp

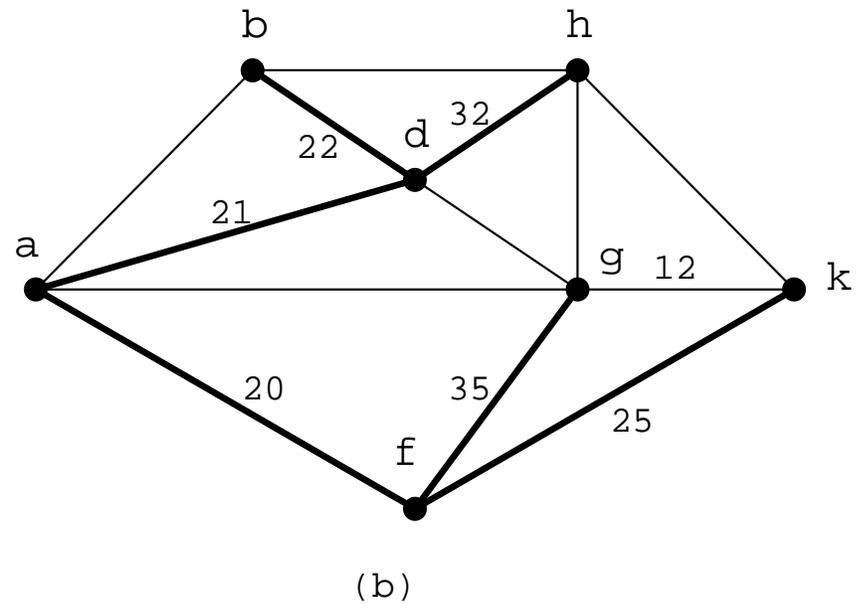
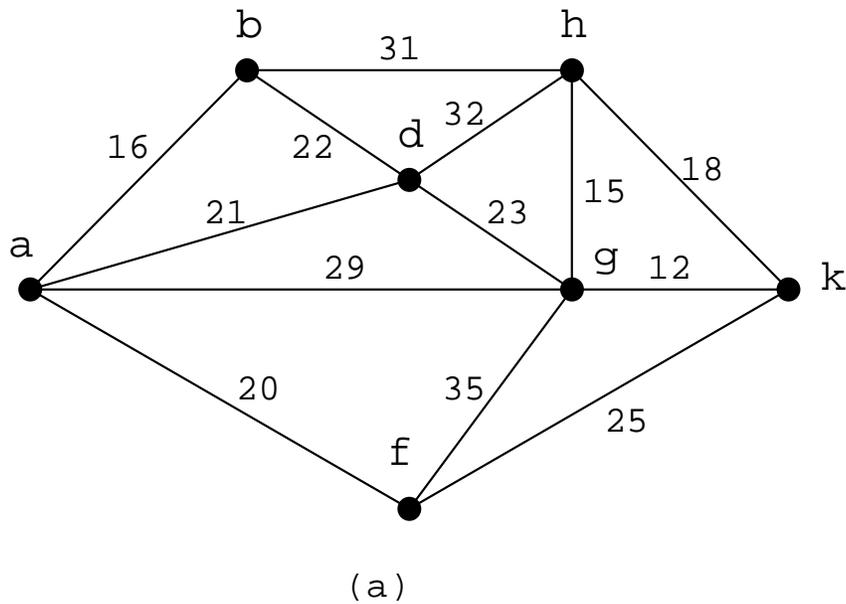
静岡大学工学部

第2章 ネットワーク



2.1.1 最小木問題

木



(a) グラフ G と $w: A \rightarrow \mathbb{R}$; (b) G の木 T (太字の枝)

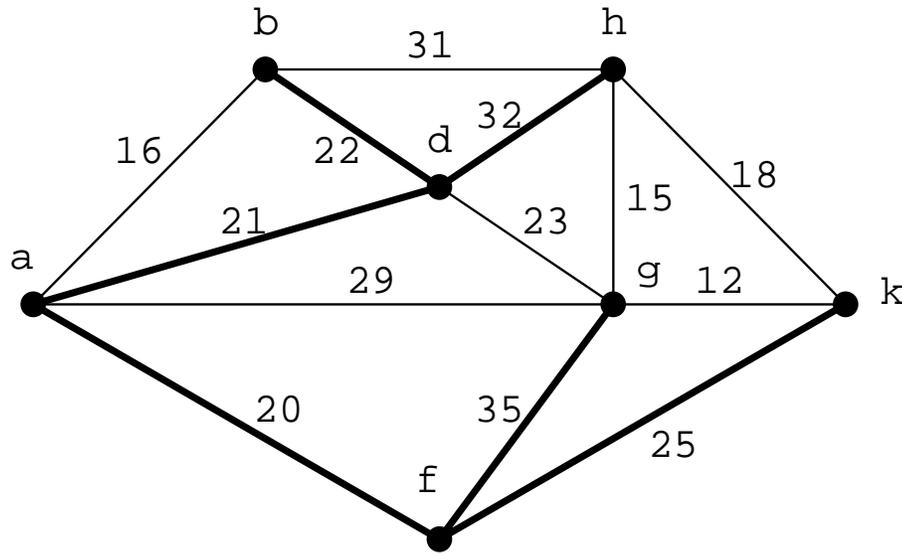
木の重み

グラフ $G = (V, A)$ と枝の重み $w: A \rightarrow \mathbf{R}$ が与えられているとする. G の木 T に対して,

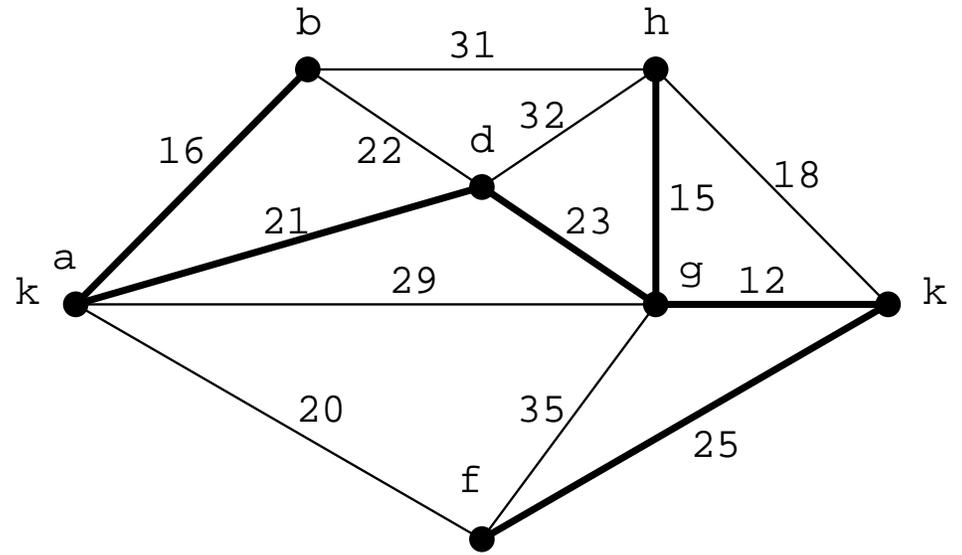
$$w(T) = \sum_{a \in T} w(a) \quad (2.1)$$

を木 T の**重み**という.

木の重み (例)



重み = 155



重み = 112

最小木問題

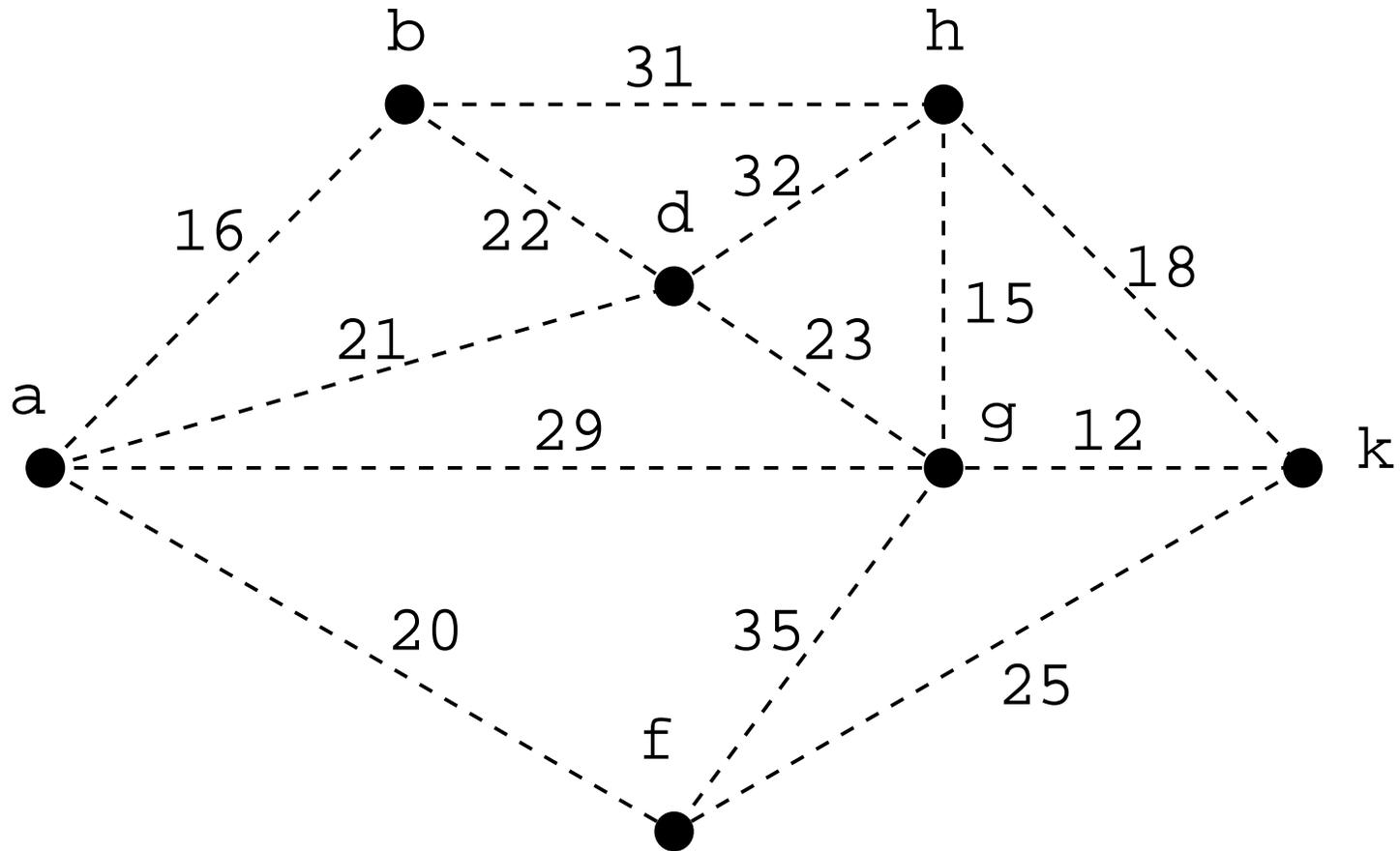
最小木問題とは、重みが最小である木を見つける問題である。

最小木問題を解くためのアルゴリズムには、貪欲アルゴリズムとヤルニーク-プリムのアルゴリズムが良く知られている。

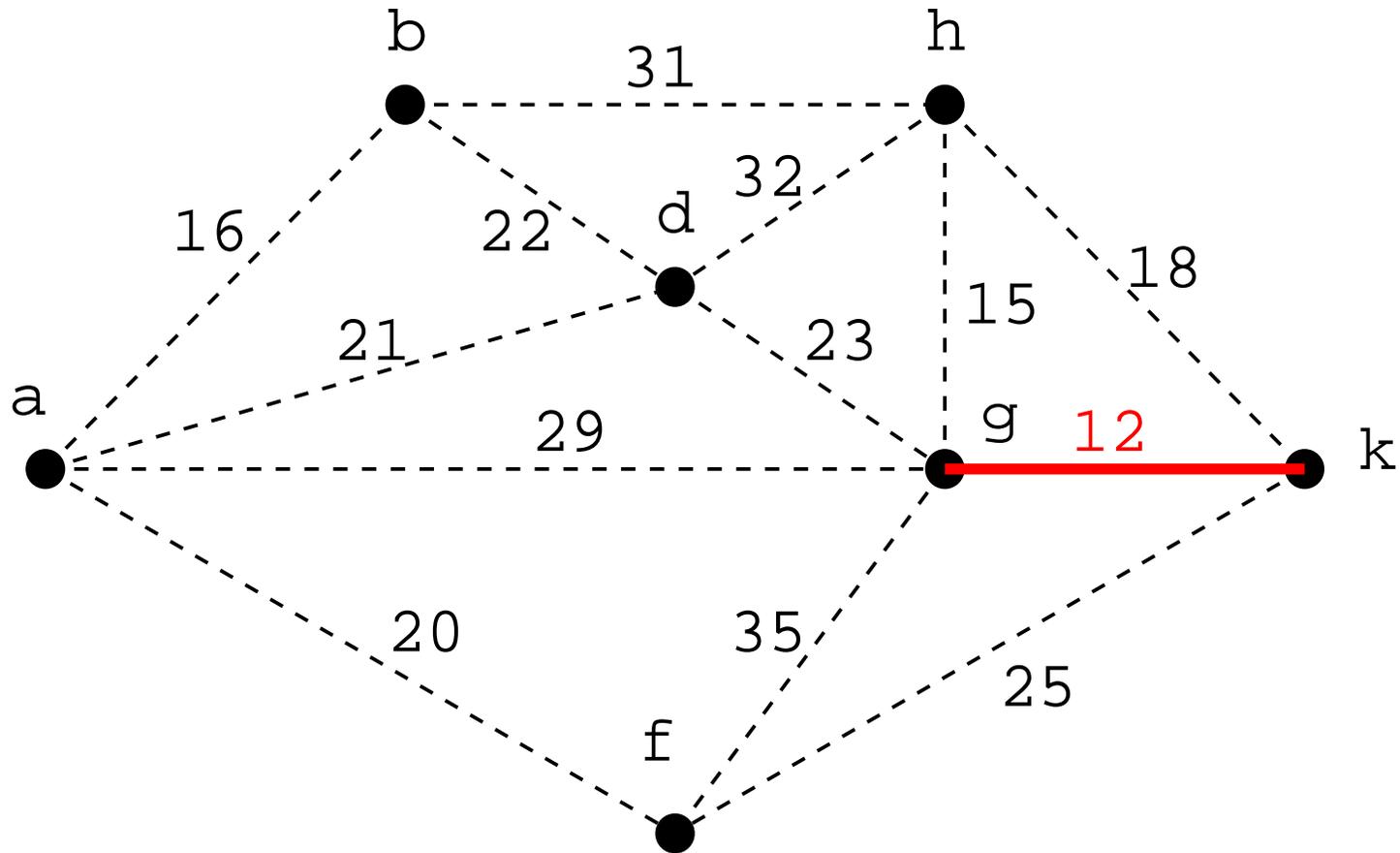
貪欲アルゴリズム

(クラスカルのアルゴリズム)

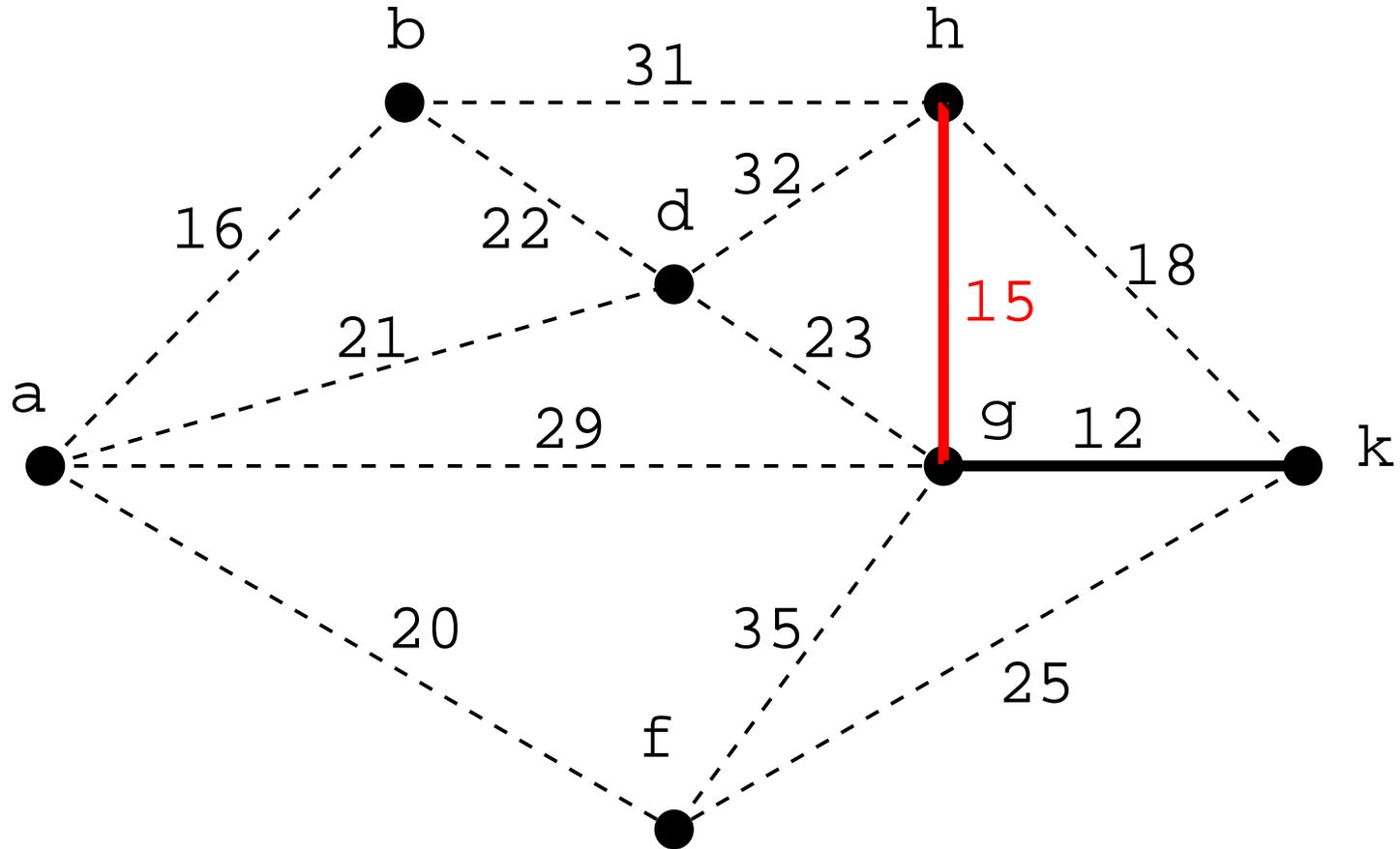
Step 1 終了時



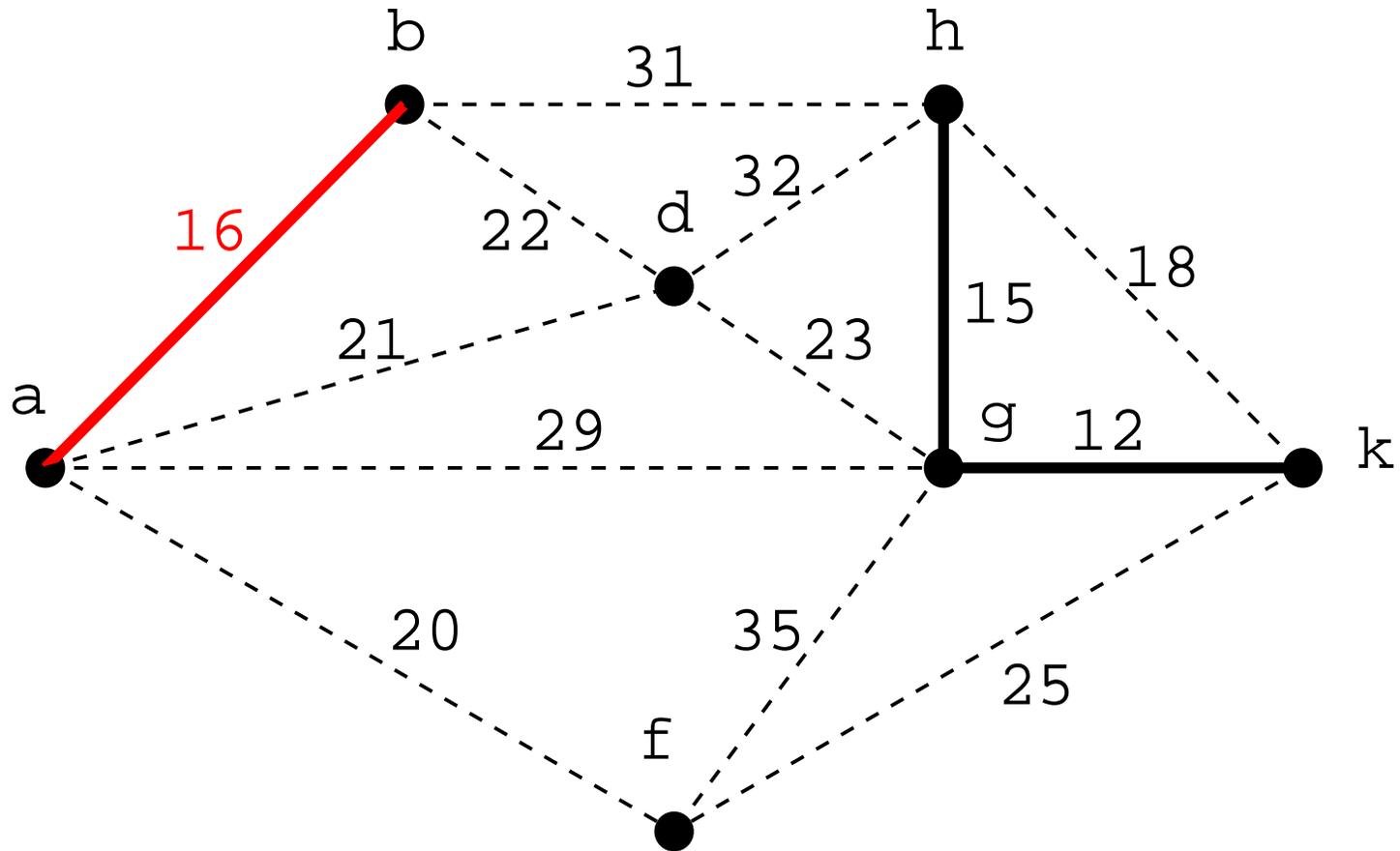
1回目のStep 3終了時



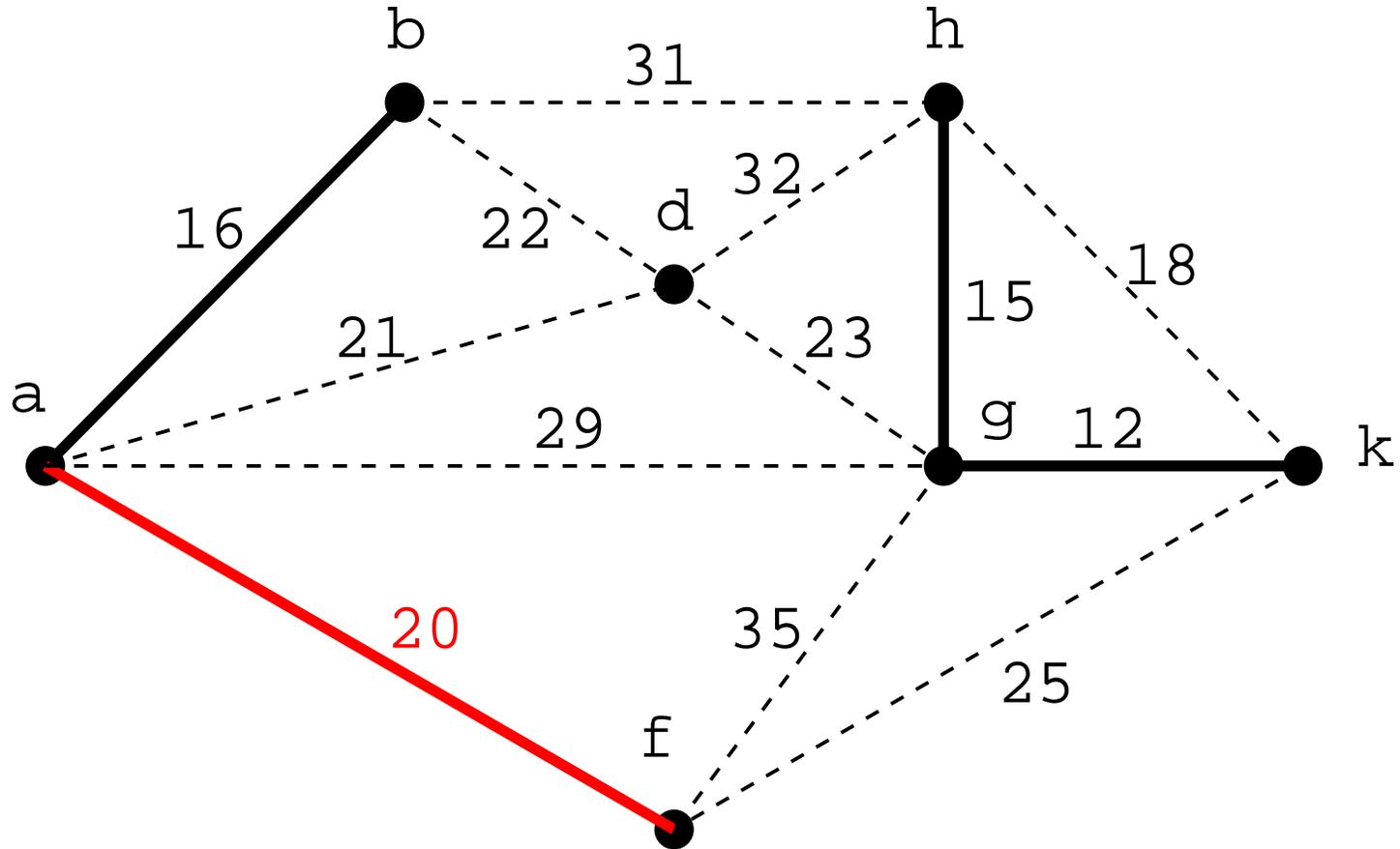
2回目のStep 3終了時



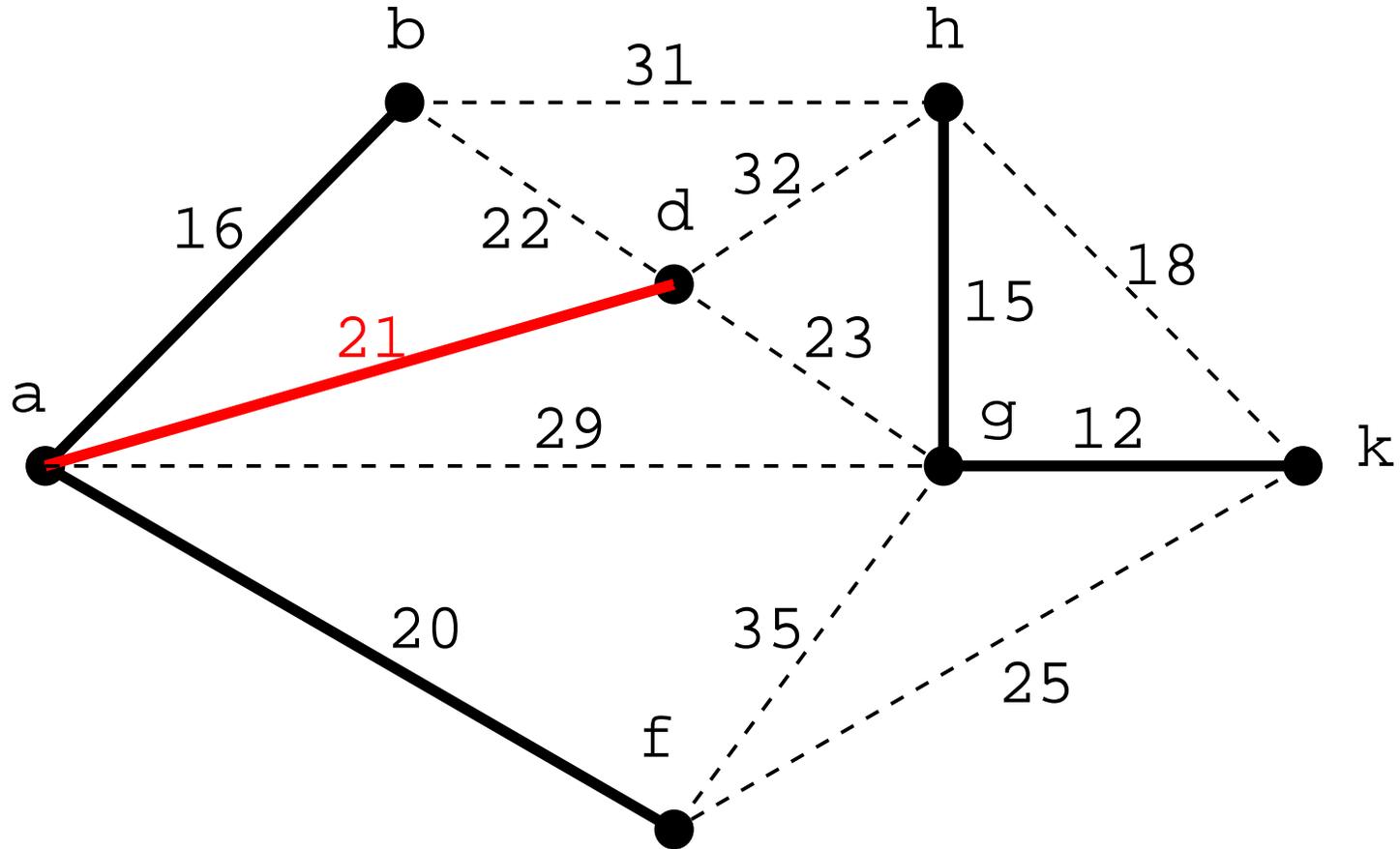
3回目のStep 3終了時



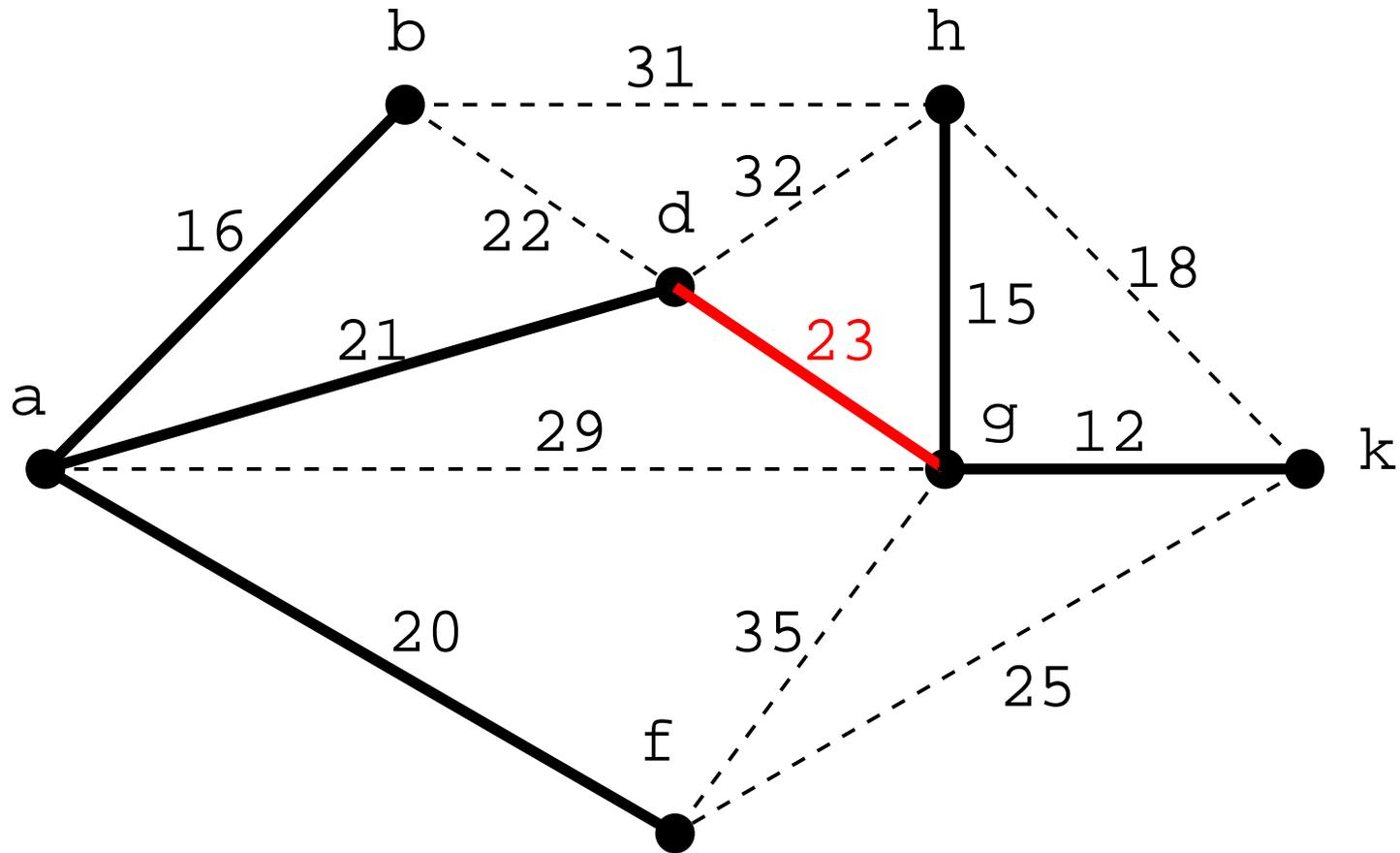
4回目のStep 3終了時



5回目のStep 3終了時



6回目のStep 3終了時



貪欲アルゴリズムの正当性 (定理 2.1)

定理 2.1 貪欲アルゴリズムの実行中に得られる T はつぎの性質をもつ:

(*) T は, 枝数 $|T|$ をもちサーキットを含まないような枝集合のうちで, その重みが最小なものである.

(ここで, 木でない枝集合 T に対しても (2.1) で重みを定義する.)

定理 2.1 より, 貪欲アルゴリズムが終了したときの T は $|T| = |V| - 1$ を満たしているから,

(*) T は, 枝数 $|V| - 1$ をもちサーキットを含まないような枝集合のうちで, その重みが最小なものである.

ところで,

枝数 $|V| - 1$ をもちサーキットを含まないような枝集合
= G の木

であるから, 貪欲アルゴリズムが終了したときの T は最小重みの木である.

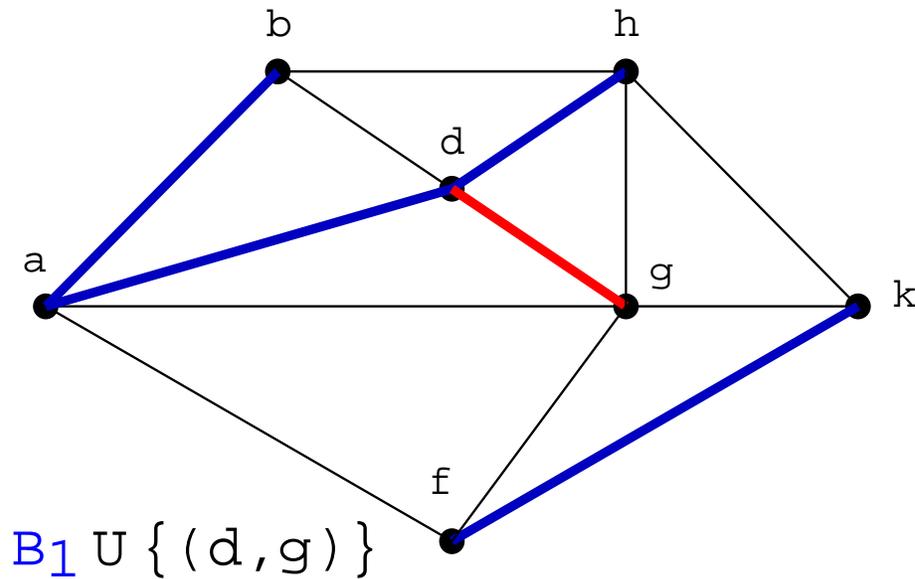
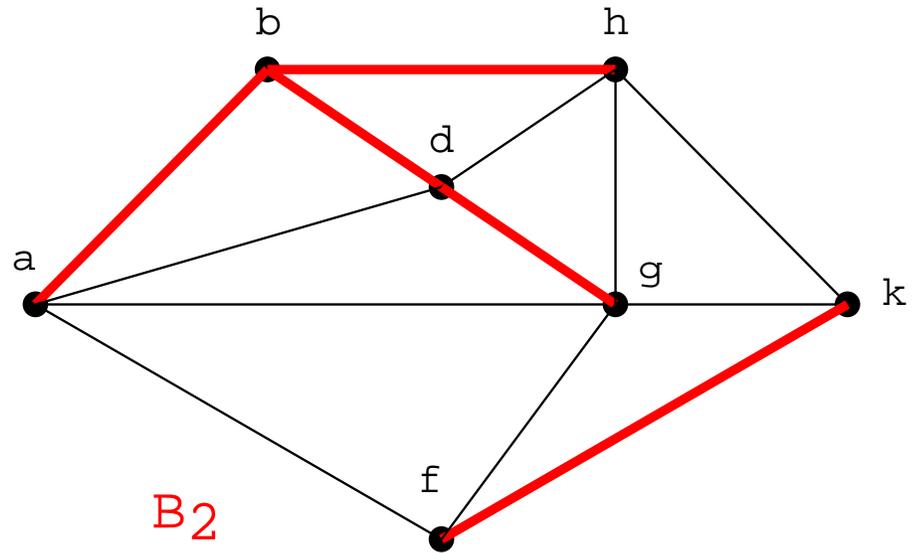
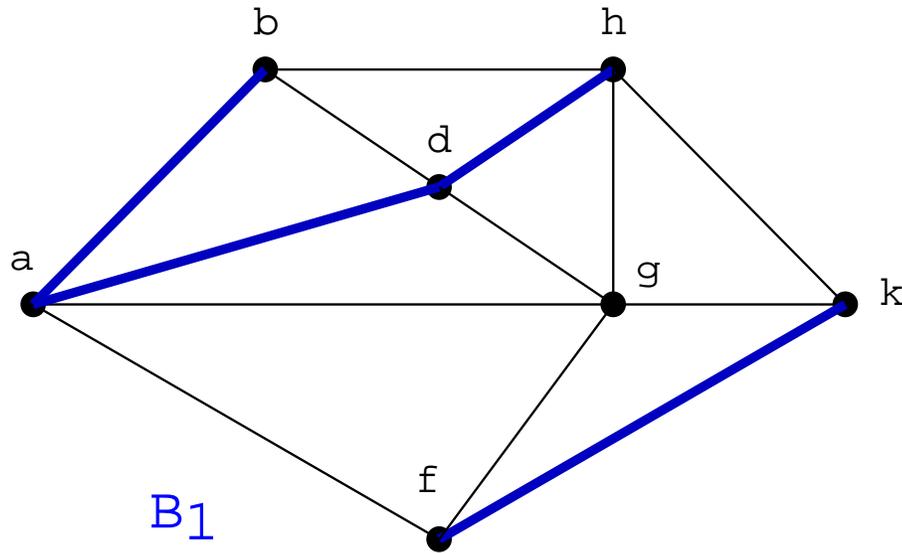
定理2.1のための補題

補題: グラフ $G = (V, A)$ の2つの枝部分集合 $B_1, B_2 \subseteq A$ に対して,

- B_1 と B_2 がともに閉路を含まない, かつ,
- $|B_1| < |B_2|$

ならば, ある $a^* \in B_2 \setminus B_1$ に対して $B_1 \cup \{a^*\}$ は閉路を含まない. (証明終了)

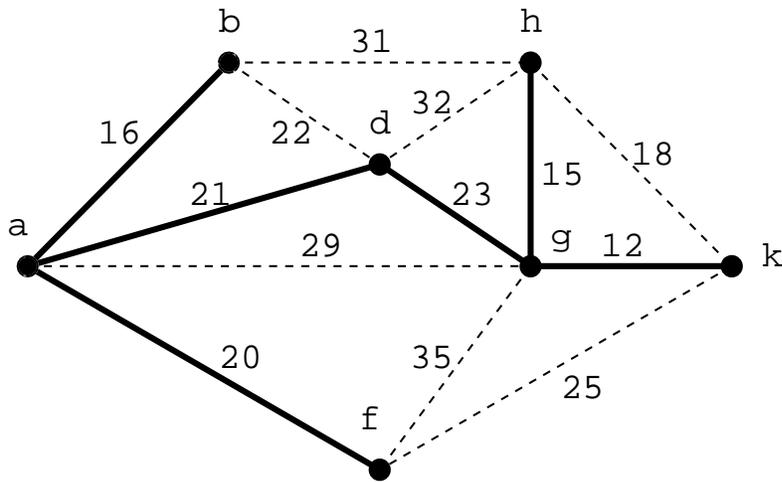
補題の説明図



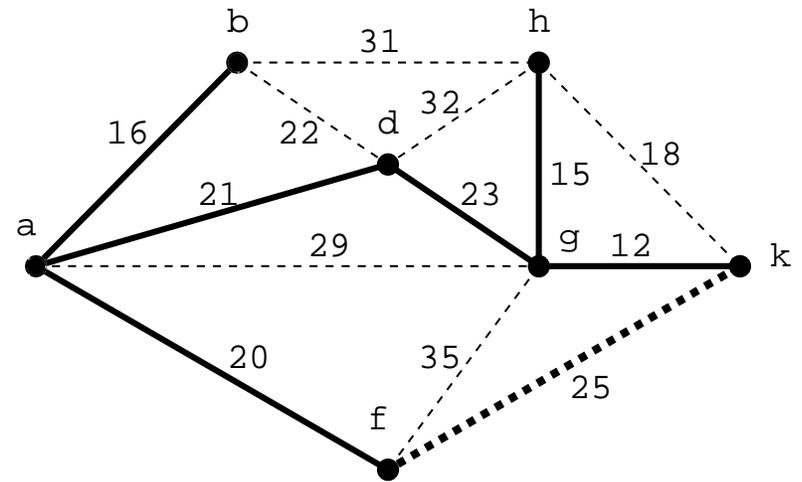
定理 2.1 の証明

基本サーキット

グラフ $g = (V, A)$ の木 T と枝 $a \in A \setminus T$ に対して, $T \cup \{a\}$ はちょうど一つの閉路を含む. この閉路を $C(T|a)$ と表し, T と a に関連する基本サーキットと呼ぶ.



(a)



(b)

グラフ G の木 T

T と $a = (f, k)$ に関連

する基本サーキット

定理 2.2

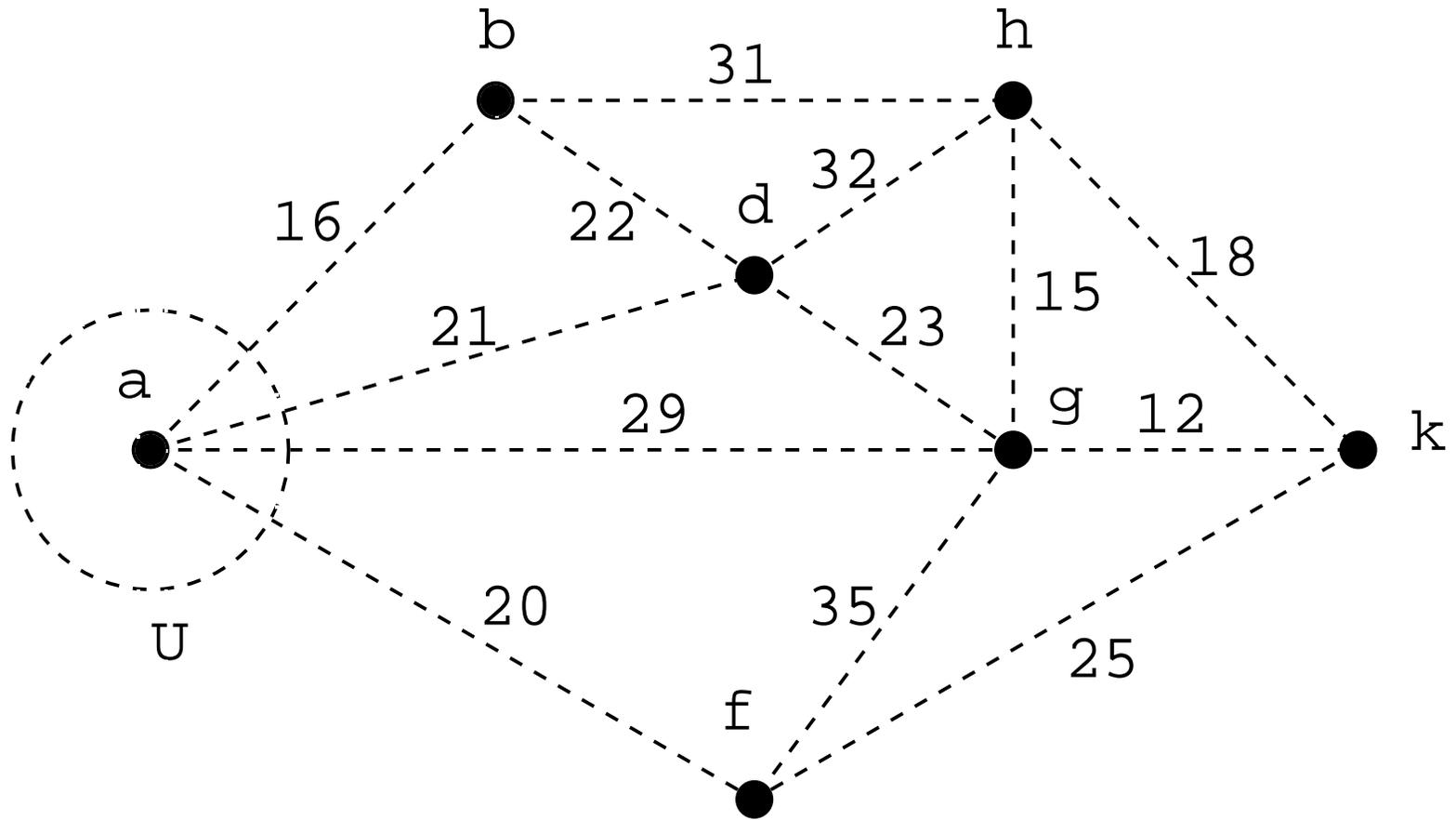
グラフ $G = (V, A)$ の木 $T \subseteq A$ が重み $w: A \rightarrow \mathbb{R}$ に関する最小木であるための必要十分条件は、各 $a \in A \setminus T$ とそれに関連する基本サーキット $C(T|a)$ 上の任意の枝 a' に対して

$$w(a') \leq w(a) \quad (2.5)$$

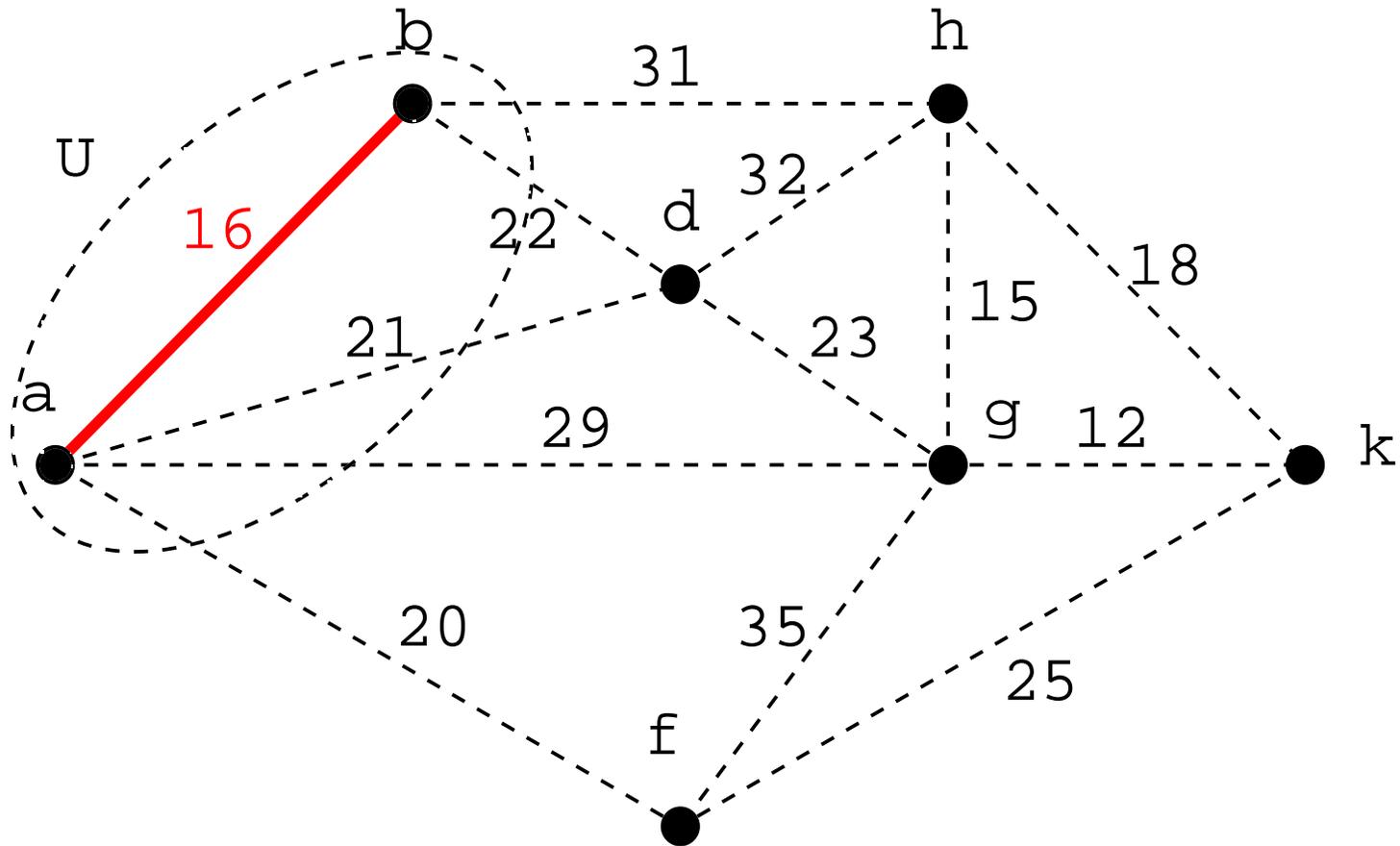
が成り立つことである。

ヤルニーク-プリム のアルゴリズム

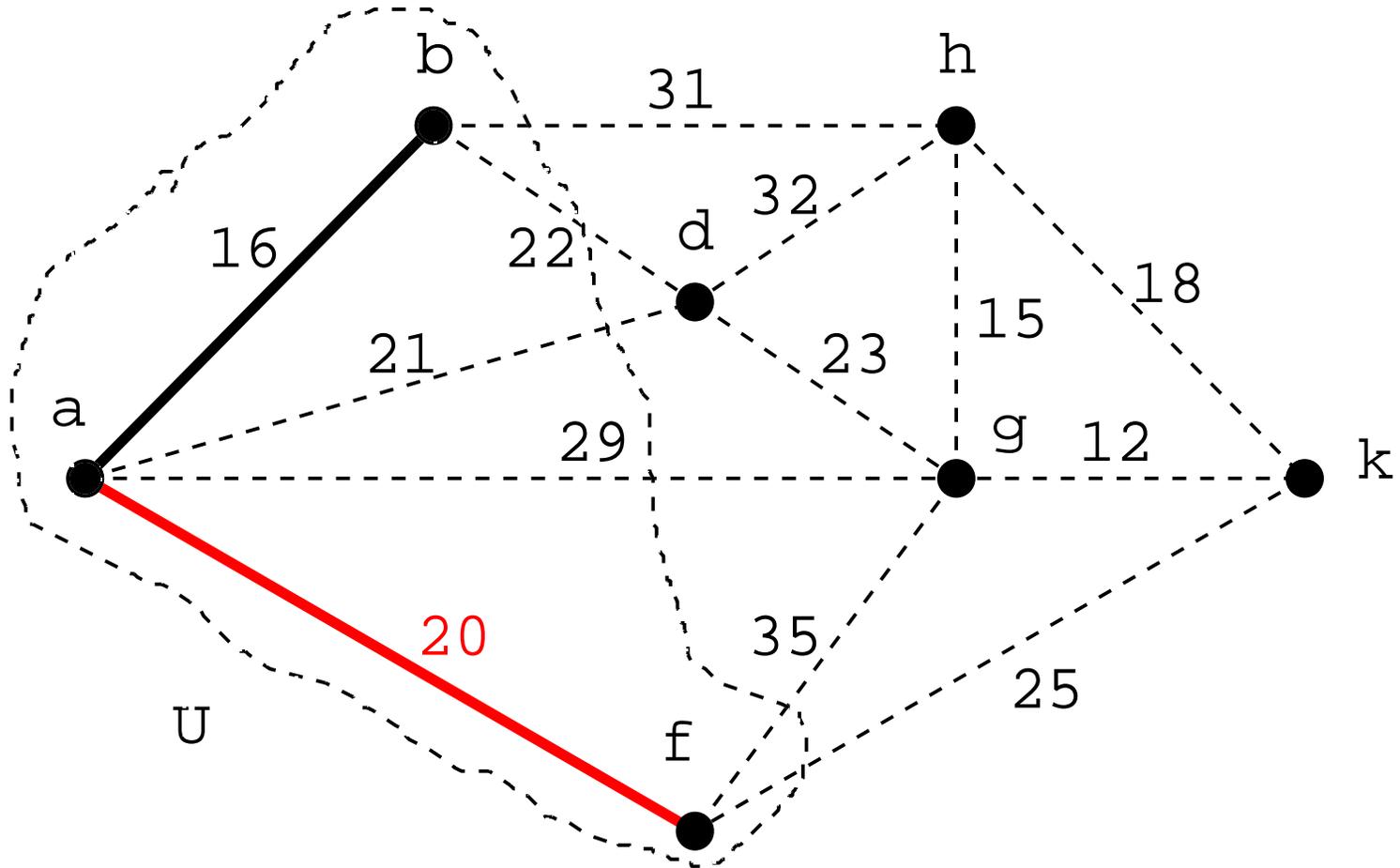
Step 1 終了時



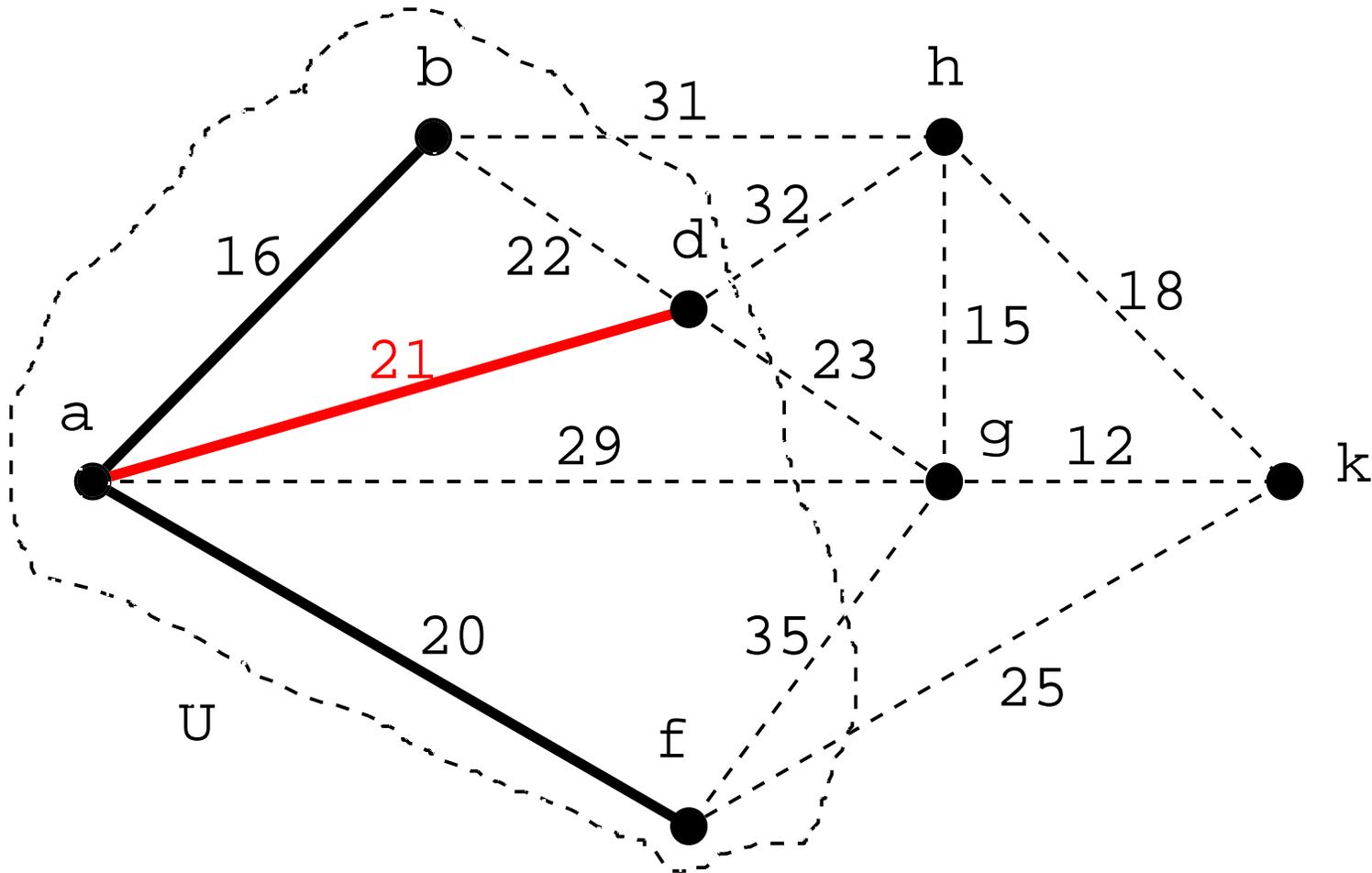
1回目のStep 3終了時



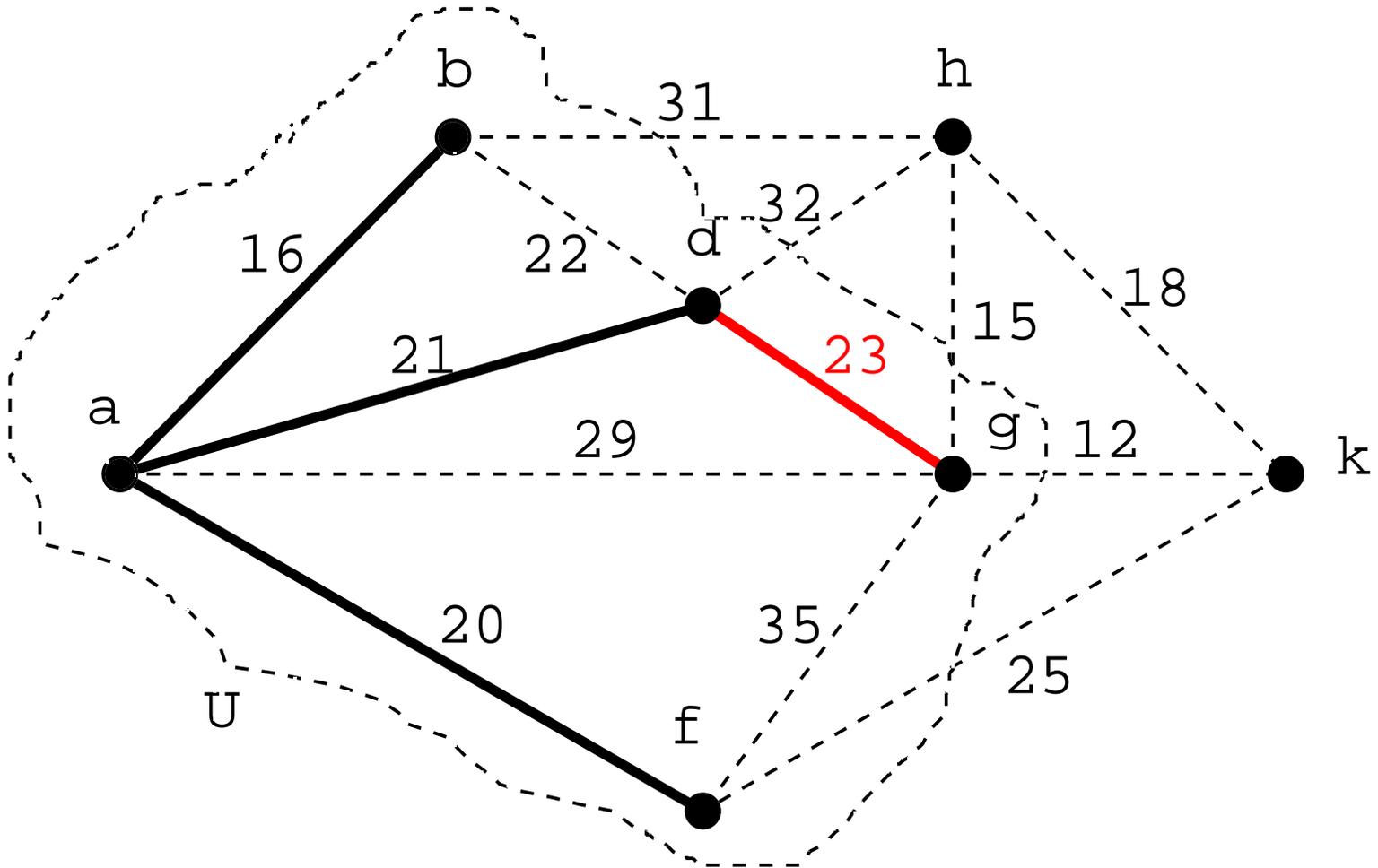
2回目のStep 3終了時



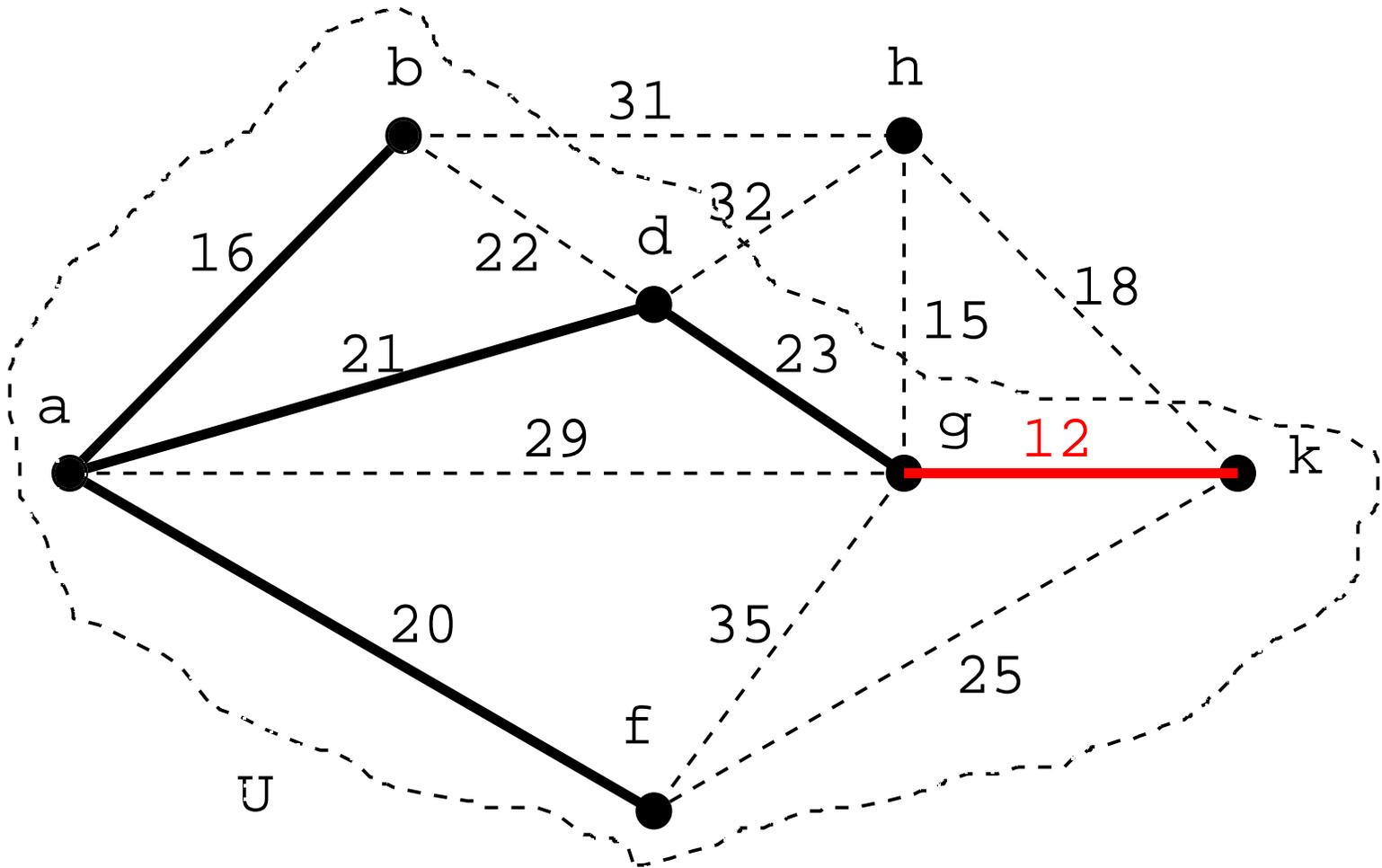
3回目のStep 3終了時



4回目のStep 3終了時



5回目のStep 3終了時



6回目のStep 3終了時

