

# グラフとネットワーク (第11回)

安藤 和敏

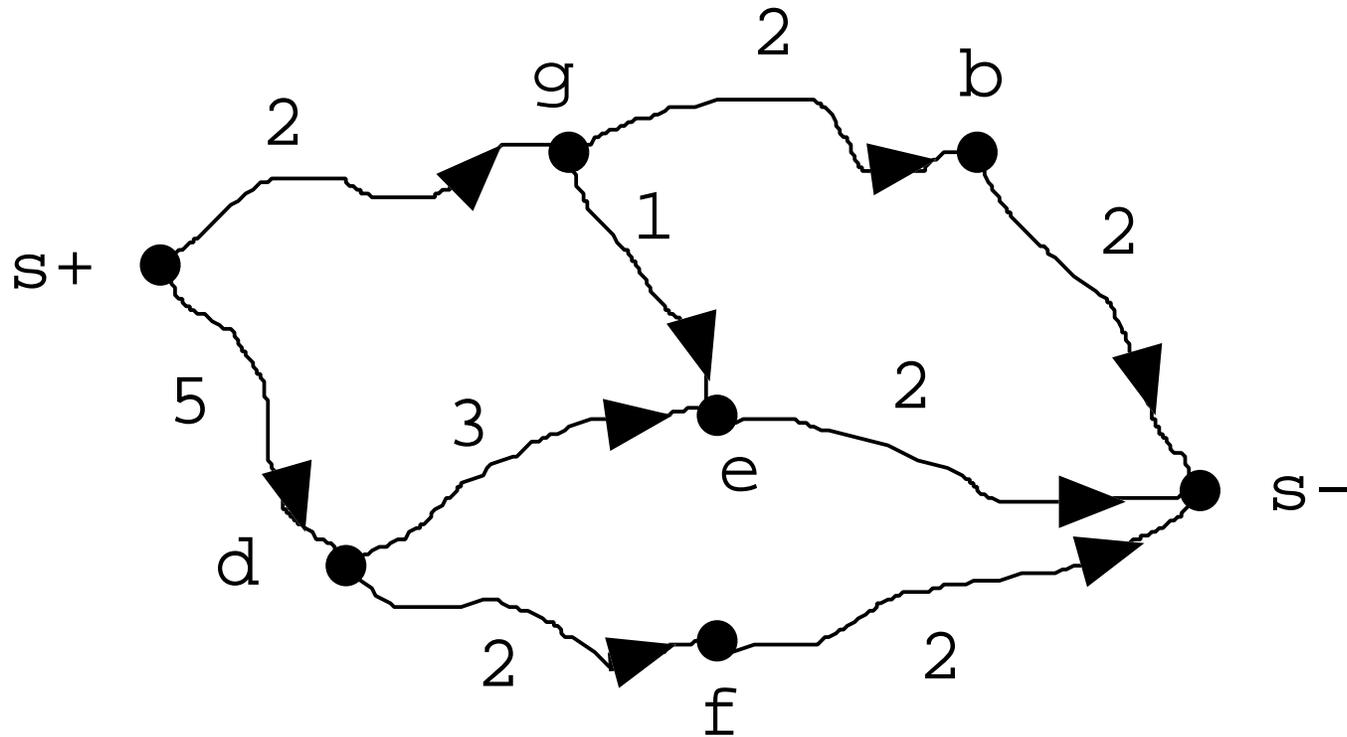
`ando@sys.eng.shizuoka.ac.jp`

静岡大学工学部

## 2.2 フローとカット

## 2.2.1 2端子フロー

ネットワーク  $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$



特別な2点:  $s^+$  と  $s^-$  は, それぞれ, 入口と出口と呼ばれる.

各枝  $a \in A$  に対して容量  $c(a)$  が与えられている.

# ネットワーク $\mathcal{N}$ 上のフロー

# ネットワーク $\mathcal{N}$ 上のフロー

ネットワーク  $\mathcal{N}$  上の**フロー** (flow) とは, つぎの (i),(ii) を満足する枝集合上の実数値関数  $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}$  のことである.

# ネットワーク $\mathcal{N}$ 上のフロー

ネットワーク  $\mathcal{N}$  上のフロー (flow) とは, つぎの (i), (ii) を満足する枝集合上の実数値関数  $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}$  のことである.

(i) 容量制約: 各枝  $a \in A$  に対して

$$0 \leq \varphi(a) \leq c(a). \quad (2.25)$$

# ネットワーク $\mathcal{N}$ 上のフロー

ネットワーク  $\mathcal{N}$  上の**フロー** (flow) とは, つぎの (i), (ii) を満足する枝集合上の実数値関数  $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}$  のことである.

(i) 容量制約: 各枝  $a \in A$  に対して

$$0 \leq \varphi(a) \leq c(a). \quad (2.25)$$

(ii) 流量保存則 (キルヒホッフの法則): 各点  $v \in V \setminus \{s^+, s^-\}$  に対して

$$\sum_{a \in \delta^+ v} \varphi(a) - \sum_{a \in \delta^- v} \varphi(a) = 0.$$

# 境界

各点  $v \in V$  に対して  $\partial\varphi(v)$  を

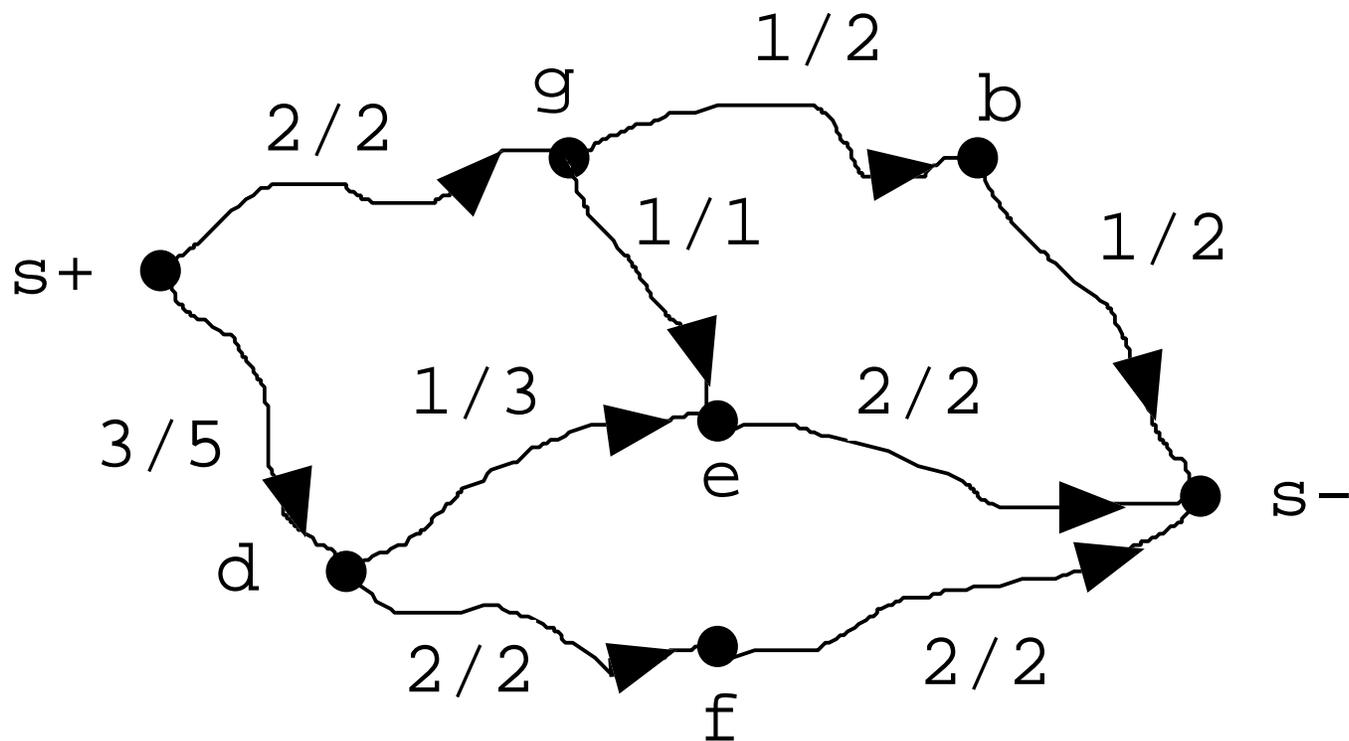
$$\partial\varphi(v) = \sum_{a \in \delta^+v} \varphi(a) - \sum_{a \in \delta^-v} \varphi(a) \quad (2.27)$$

と定義すると, 流量保存則は

$$\partial\varphi(v) = 0. \quad (2.26)$$

となる.  $\partial\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$  はフロー  $\varphi$  の境界 (boundary) と呼ばれる.

# フローの例



各枝  $a$  に付された数は,  $\varphi(a)/c(a)$  を意味する.

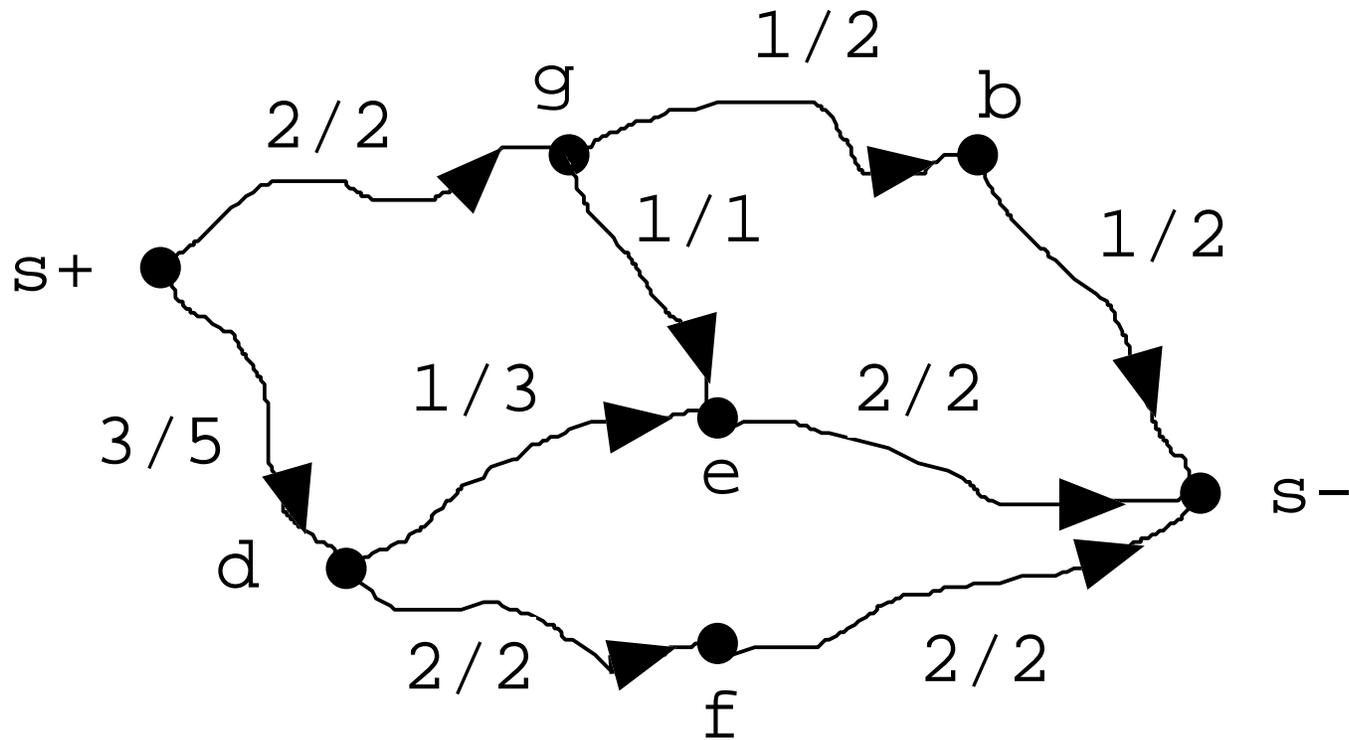
# フローの流量

流量保存則によって,

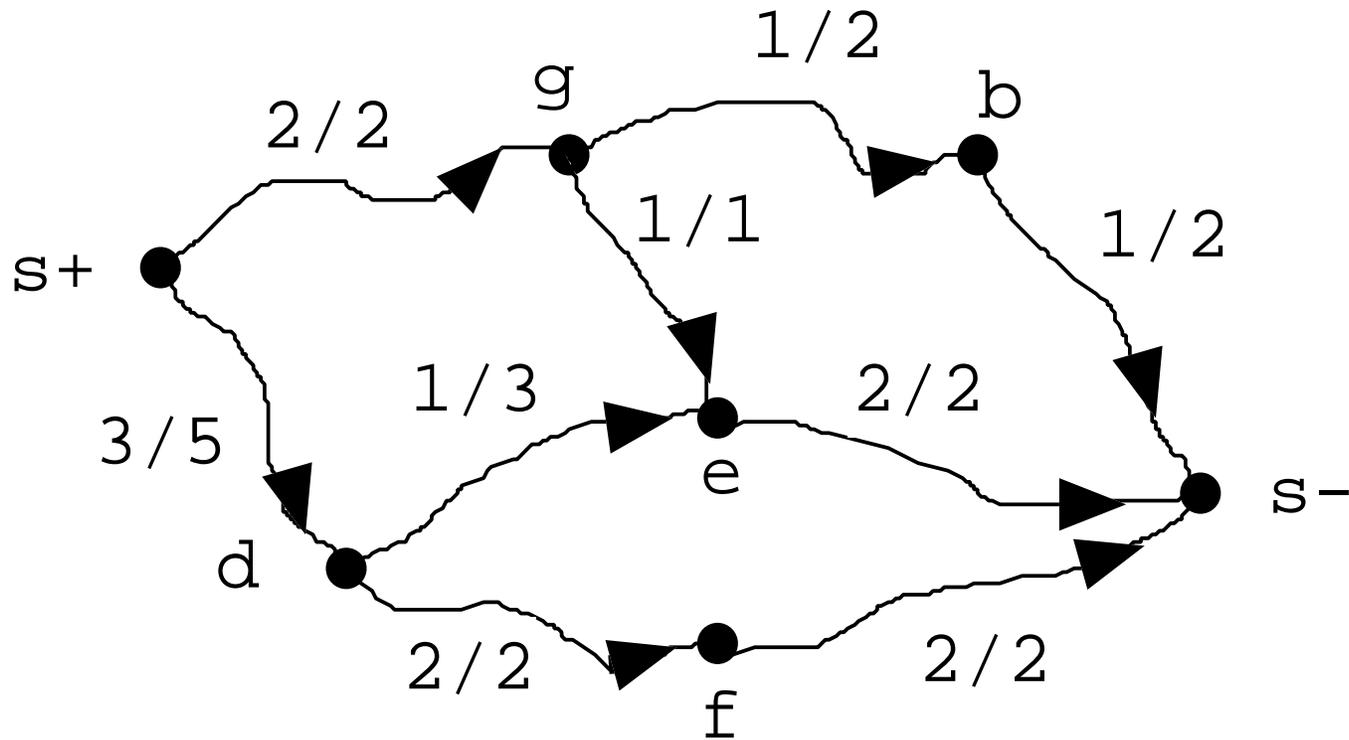
$$\partial\varphi(s^+) = -\partial\varphi(s^-) \quad (2.28)$$

が成り立つ. (2.28) の値をフロー  $\varphi$  の流量 (value, flow value) といい,  $v^*(\varphi)$  と書くことにする.

# フローの流量の例



# フローの流量の例



$$v^*(\varphi) = 5.$$

# 最大流問題

- 与えられたネットワーク

$\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$  に対して,  $\mathcal{N}$  上のフロー  $\varphi$  でその流量  $v^*(\varphi)$  が最大であるようなものを**最大フロー (最大流)** (maximum flow) と呼び,

# 最大流問題

- 与えられたネットワーク

$\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$  に対して,  $\mathcal{N}$  上のフロー  $\varphi$  でその流量  $v^*(\varphi)$  が最大であるようなものを**最大フロー (最大流)** (maximum flow) と呼び,

- 最大フローを求める問題を**最大フロー問題** (maximum flow problem) と呼ぶ.

# 最大流問題

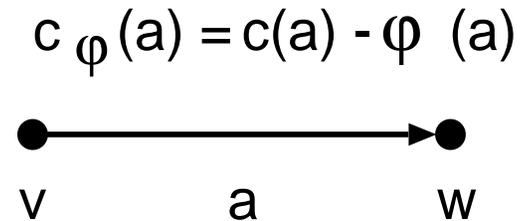
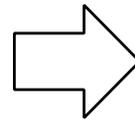
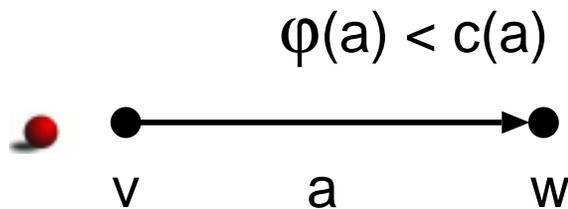
- 与えられたネットワーク  
 $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$  に対して,  $\mathcal{N}$  上のフロー  $\varphi$  でその流量  $v^*(\varphi)$  が最大であるようなものを**最大フロー (最大流)** (maximum flow) と呼び、
- 最大フローを求める問題を**最大フロー問題** (maximum flow problem) と呼ぶ。
- 最大流問題に対するアルゴリズムとして**フォード-ファルカーソンのアルゴリズム**がある。このアルゴリズムでは, 以下に説明する**補助ネットワーク**を用いる。

# 補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$

ネットワーク  $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$  上のフロー  $\varphi$  に対して, 補助ネットワーク  $\mathcal{N}_\varphi = (G_\varphi = (V, A_\varphi), s^+, s^-, c_\varphi)$  は以下のように構成される.

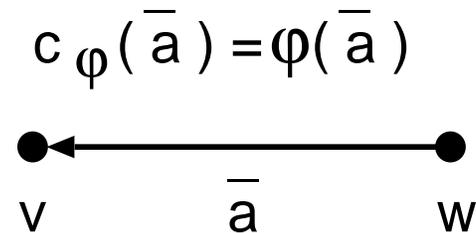
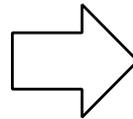
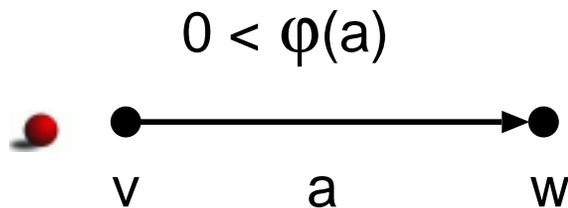
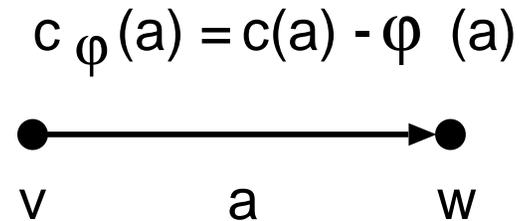
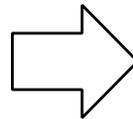
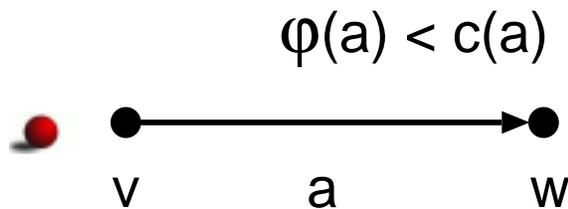
# 補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$

ネットワーク  $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$  上のフロー  $\varphi$  に対して, 補助ネットワーク  $\mathcal{N}_\varphi = (G_\varphi = (V, A_\varphi), s^+, s^-, c_\varphi)$  は以下のように構成される.

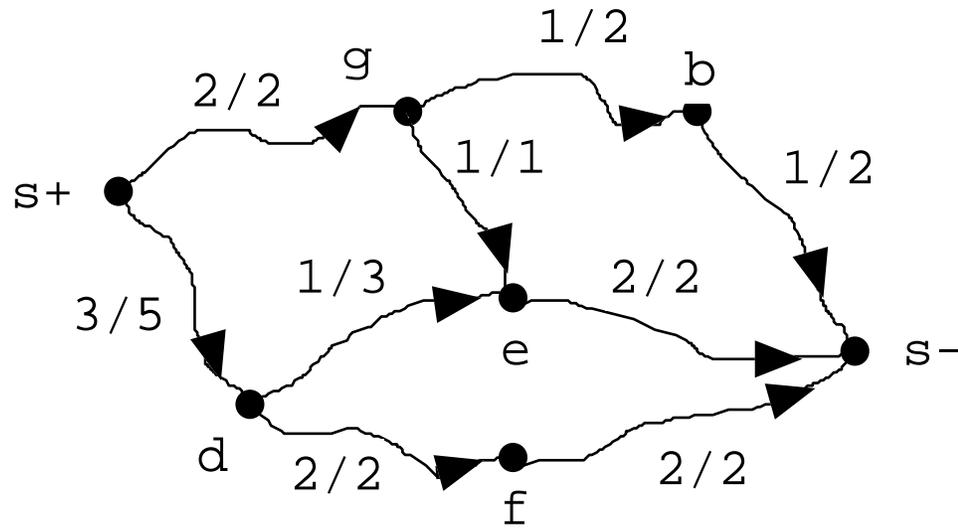


# 補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$

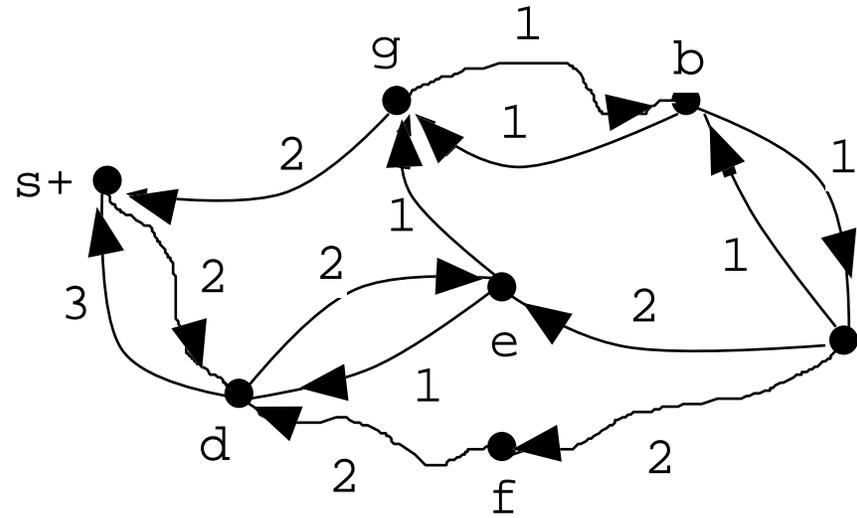
ネットワーク  $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$  上のフロー  $\varphi$  に対して, 補助ネットワーク  $\mathcal{N}_\varphi = (G_\varphi = (V, A_\varphi), s^+, s^-, c_\varphi)$  は以下のように構成される.



# 補助ネットワークの例

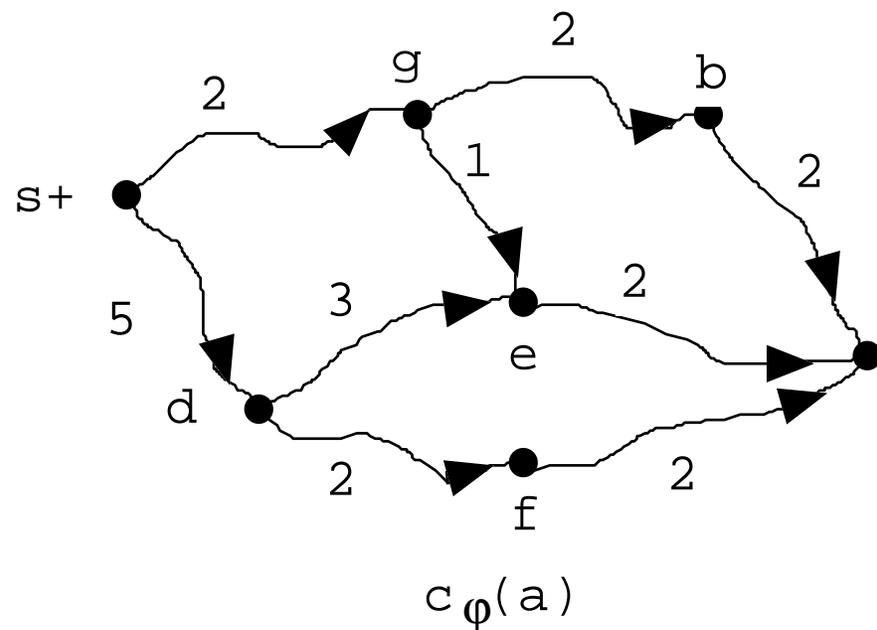
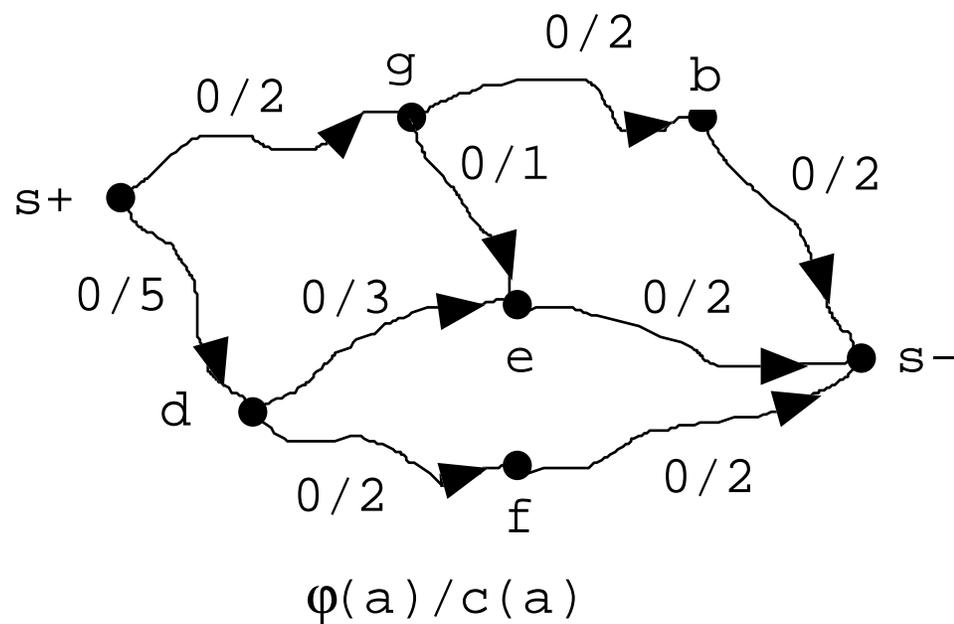


$\phi(a)/c(a)$

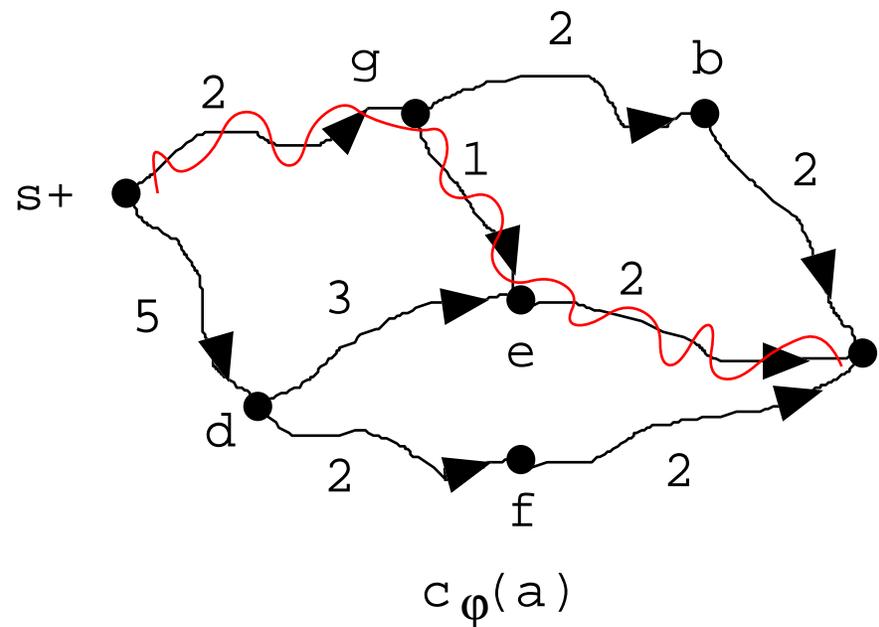
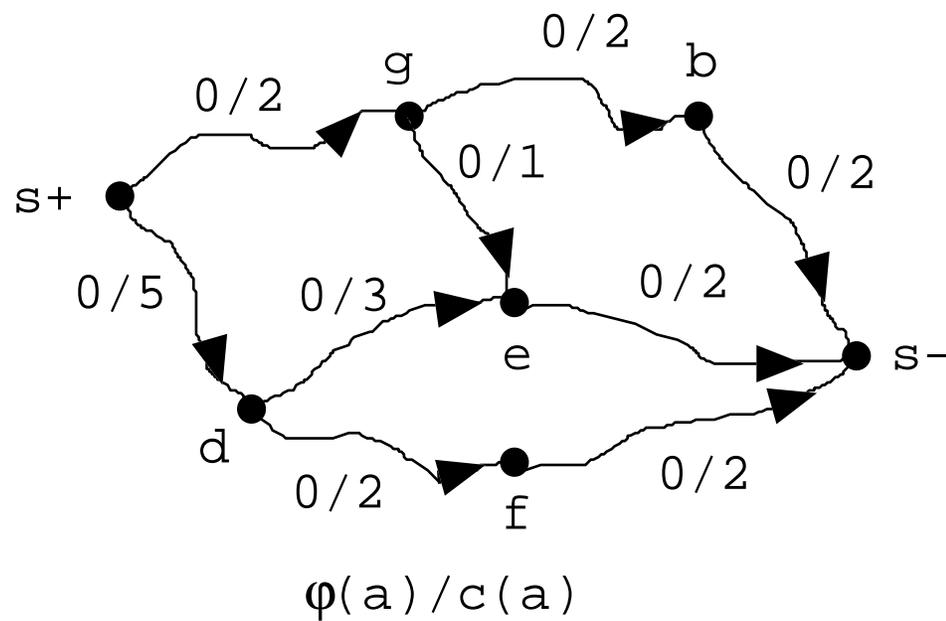


$c_{\phi(a)}$

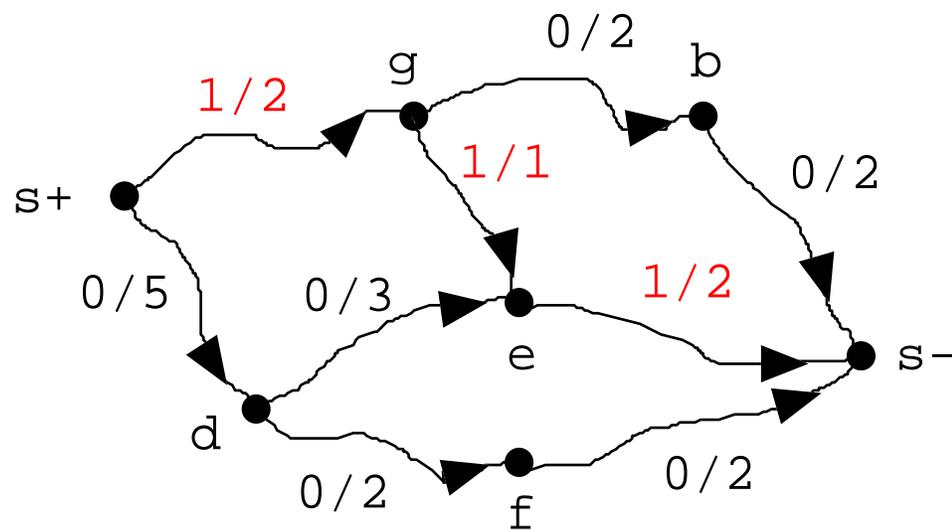
# フォード-ファルカーソンのアルゴリズム (1)



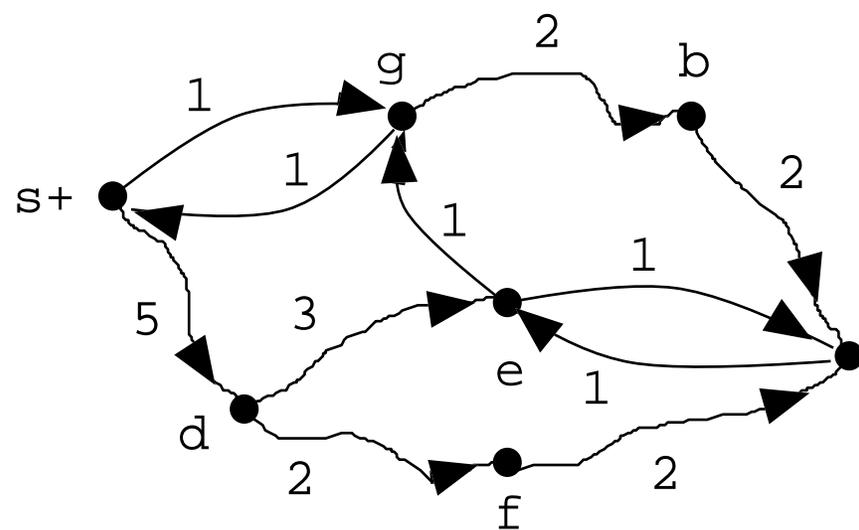
# フォード-ファルカーソンのアルゴリズム (1)



# フォード-ファルカーソンのアルゴリズム (2)

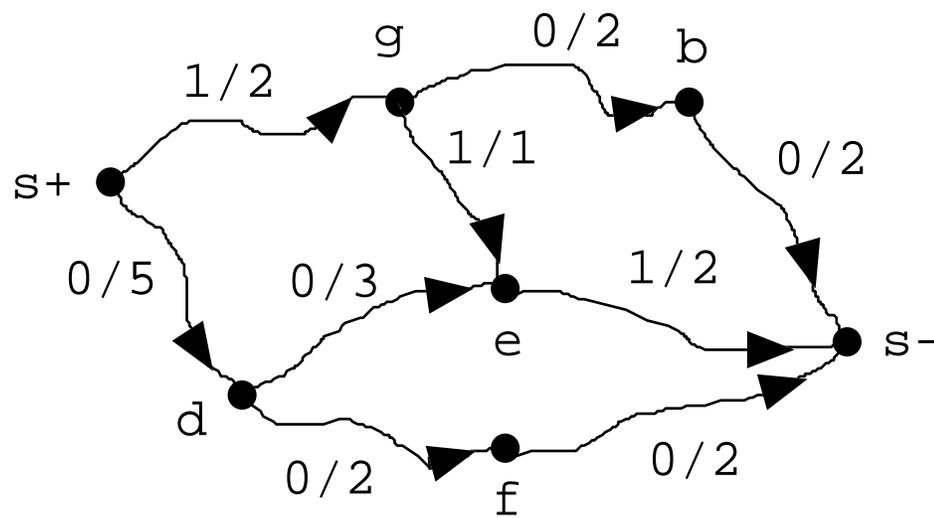


$\phi(a) / c(a)$

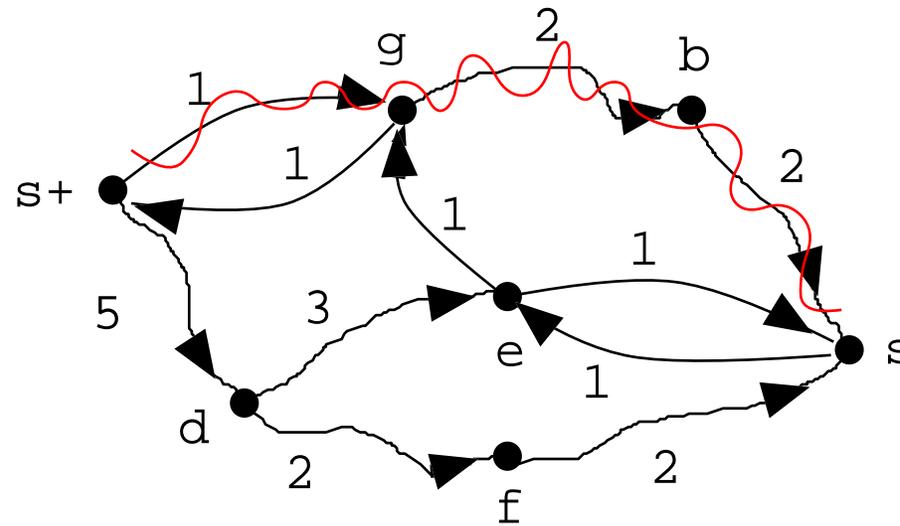


$c_{\phi}(a)$

# フォード-ファルカーソンのアルゴリズム (2)

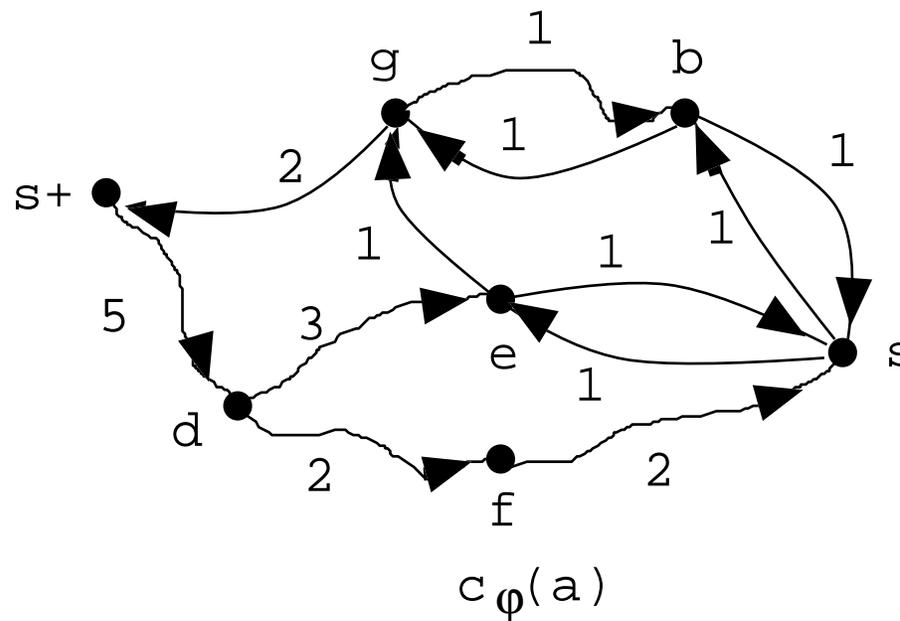
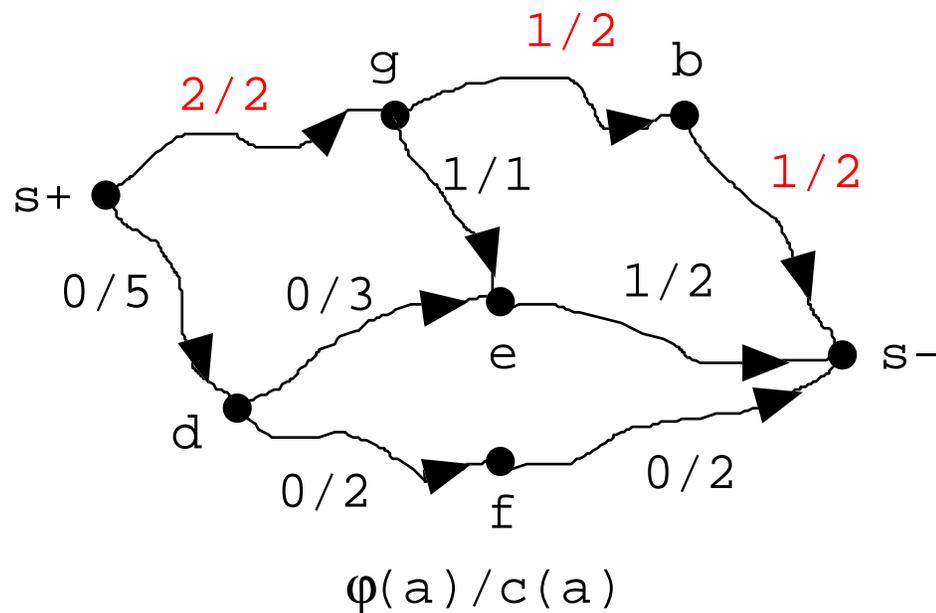


$\phi(a) / c(a)$

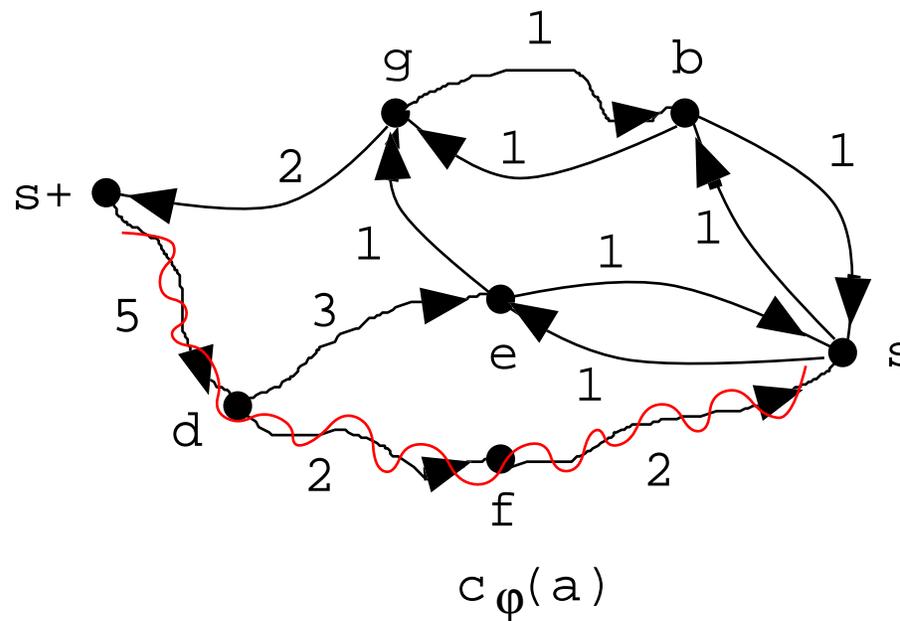
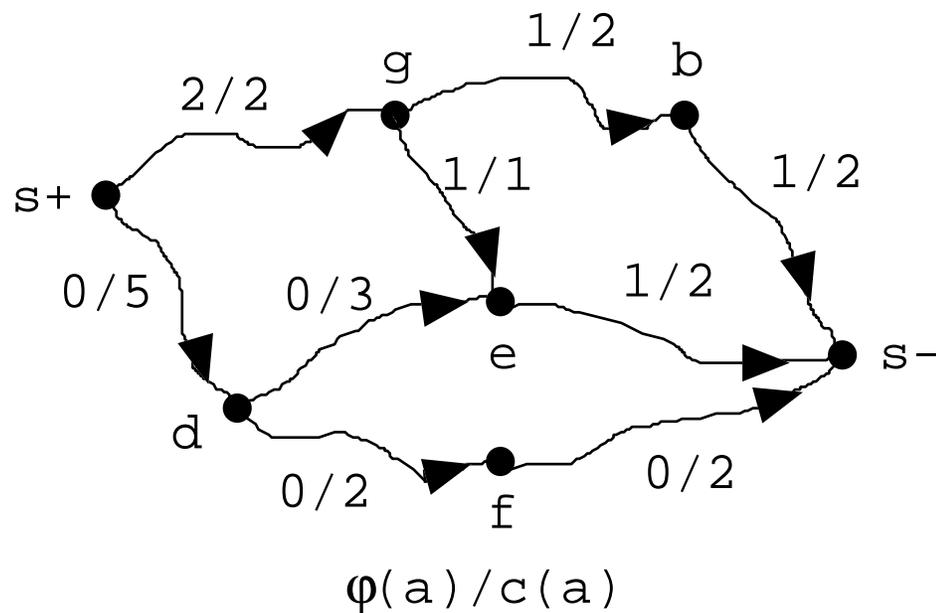


$c_{\phi(a)}$

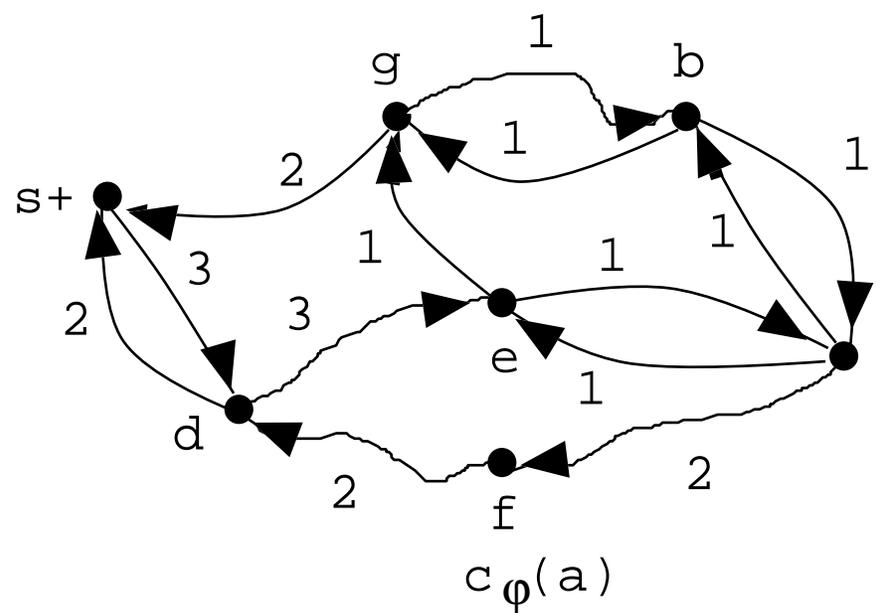
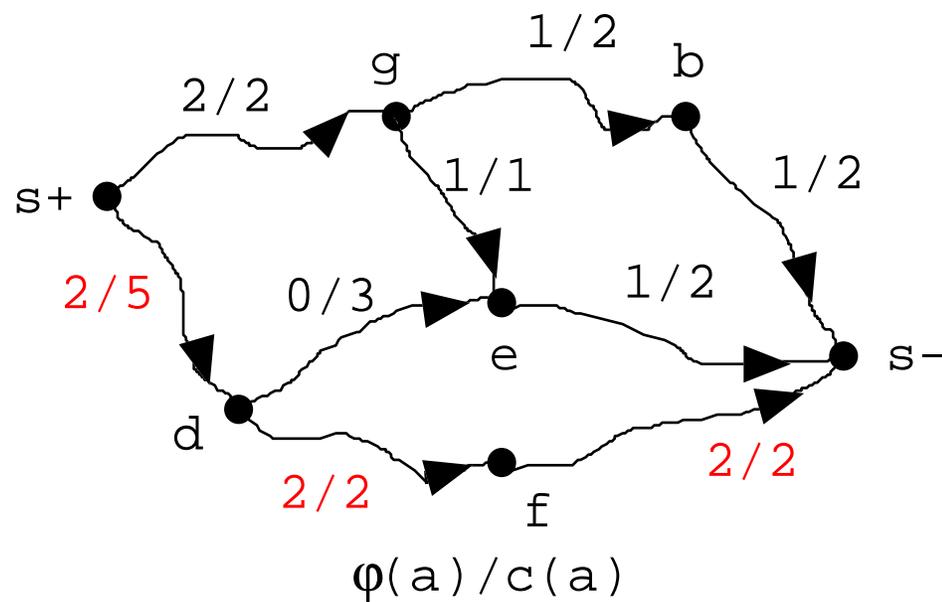
# フォード-ファルカーソンのアルゴリズム (3)



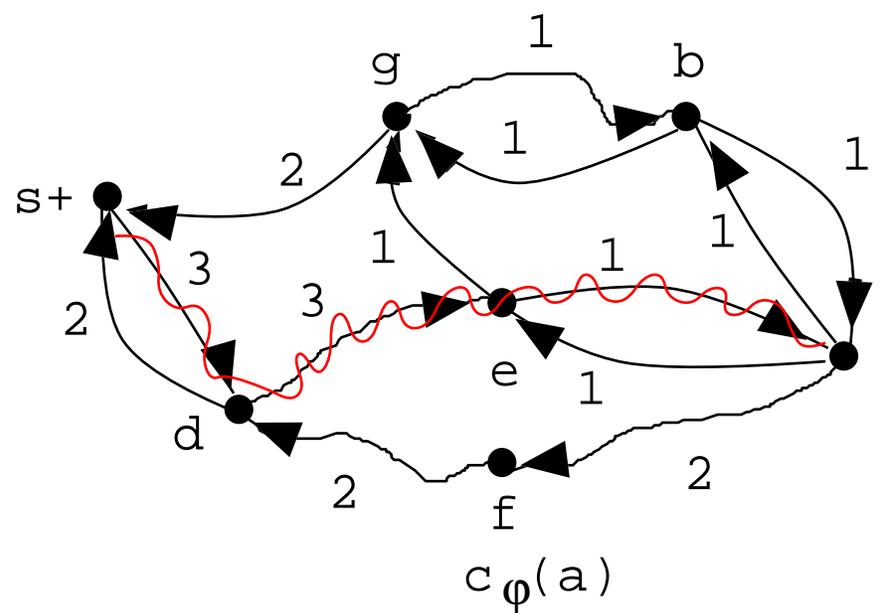
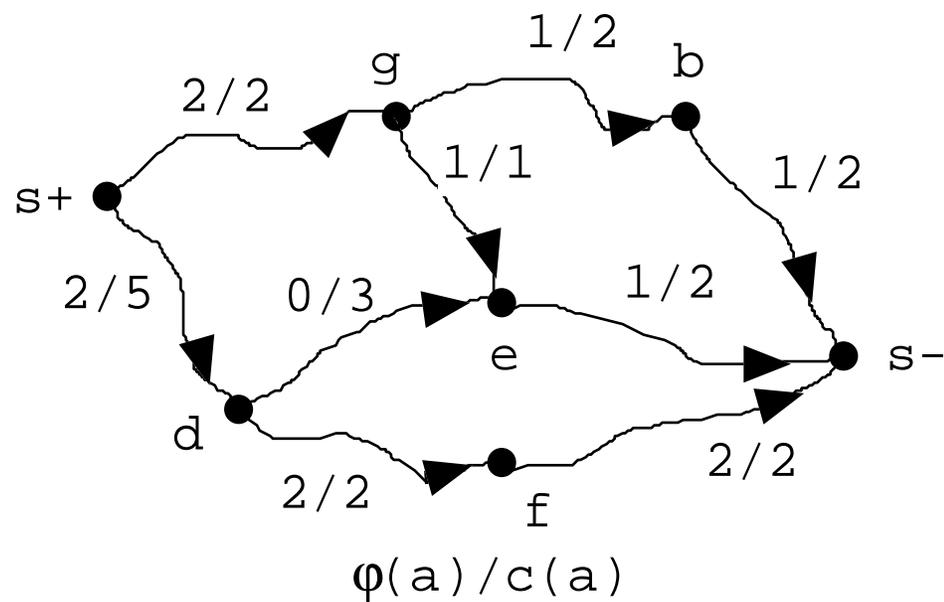
# フォード-ファルカーソンのアルゴリズム (3)



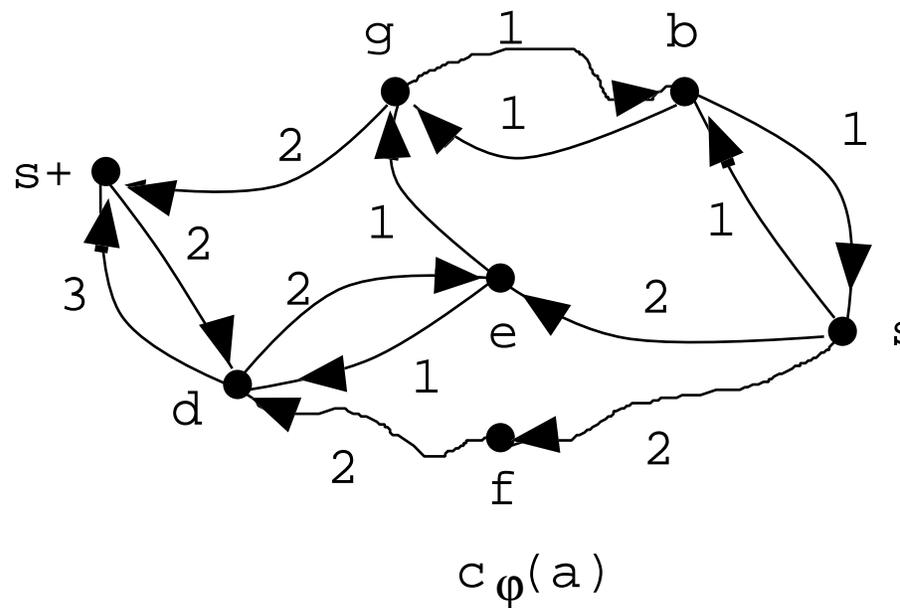
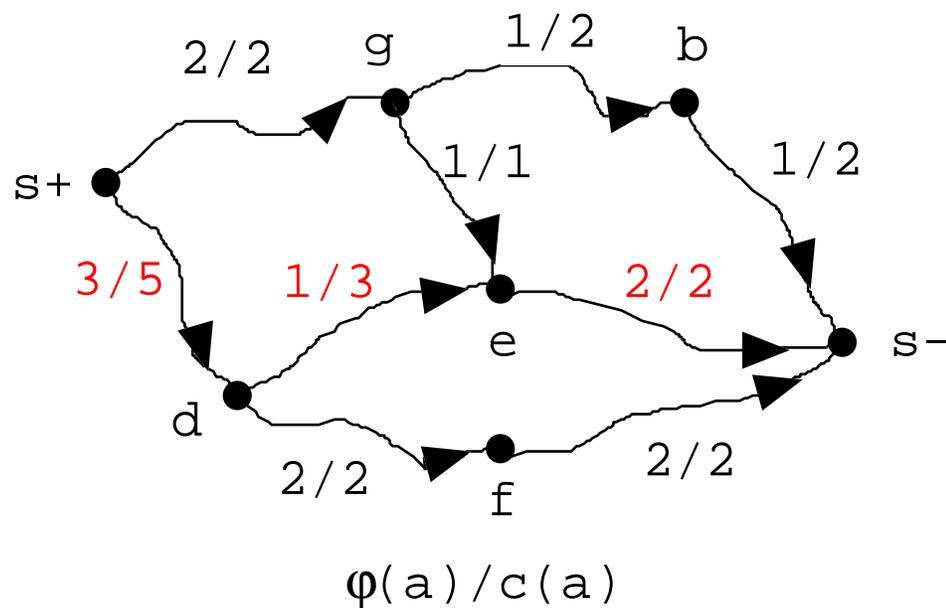
# フォード-ファルカーソンのアルゴリズム (4)



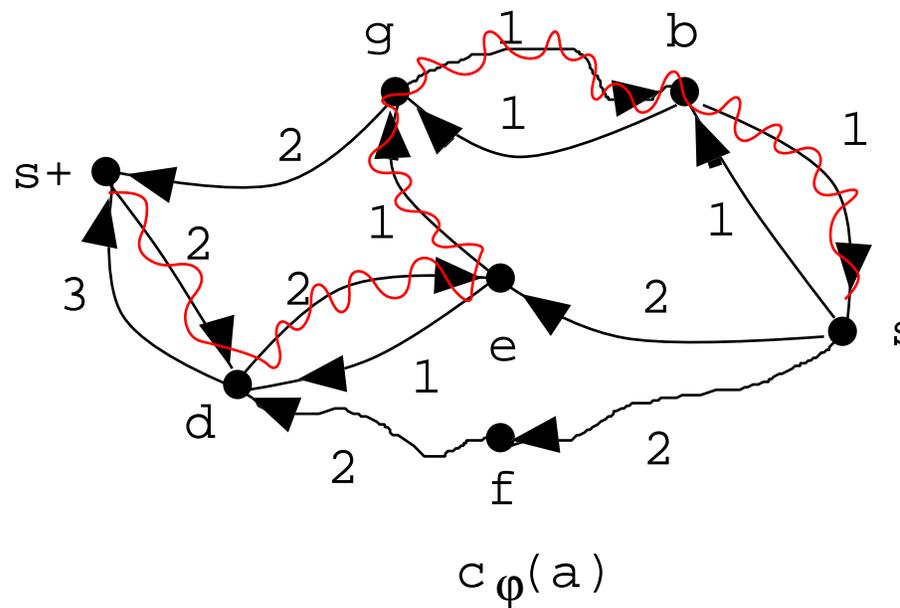
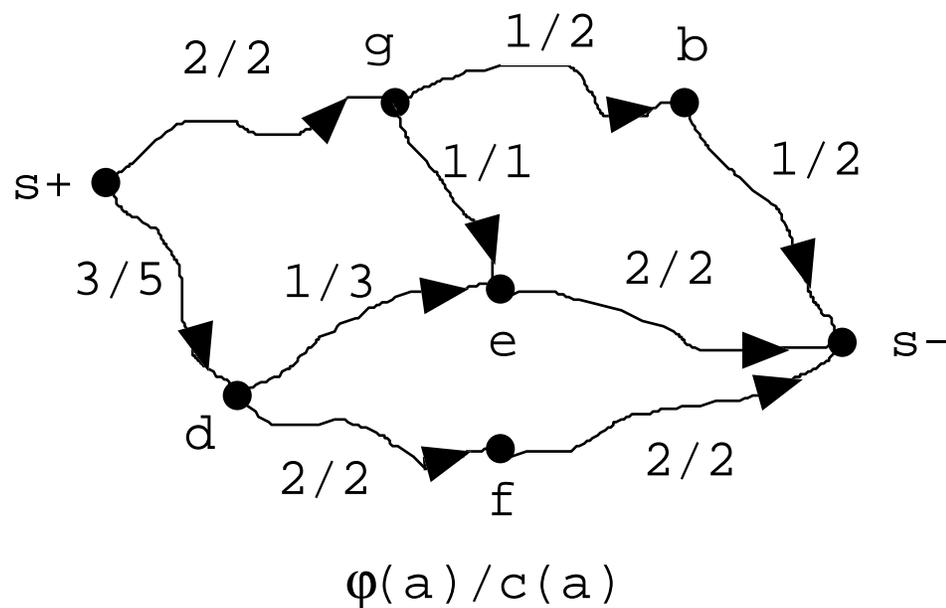
# フォード-ファルカーソンのアルゴリズム (4)



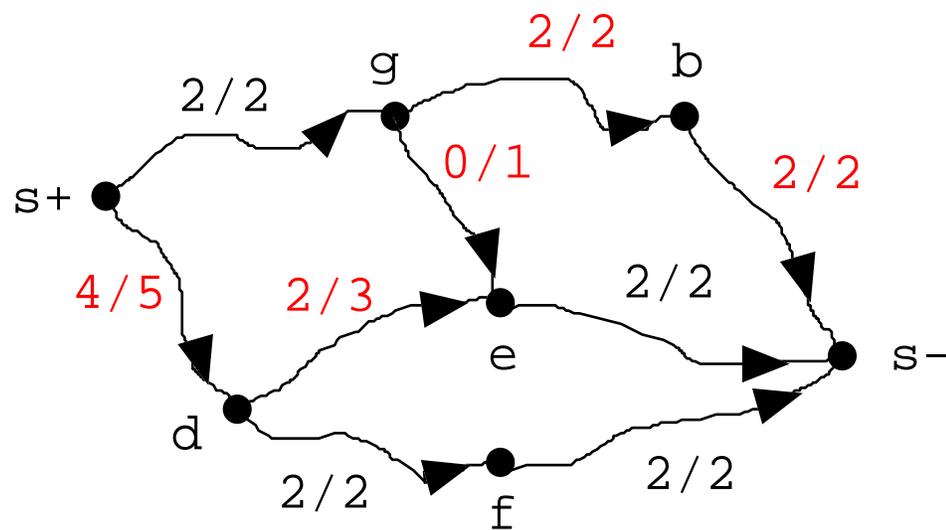
# フォード-ファルカーソンのアルゴリズム (5)



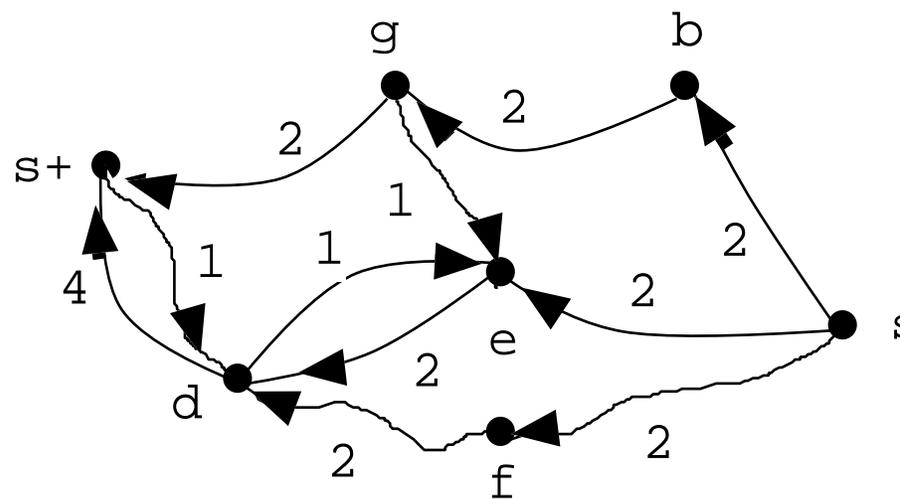
# フォード-ファルカーソンのアルゴリズム (5)



# フォード-ファルカーソンのアルゴリズム (6)



$\varphi(a) / c(a)$



$c_{\varphi}(a)$