

情報とコンピュータ

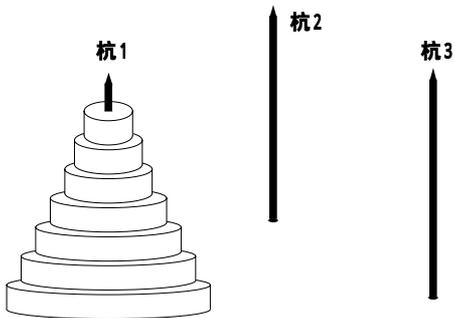
静岡大学工学部
安藤和敏

2006.01.23

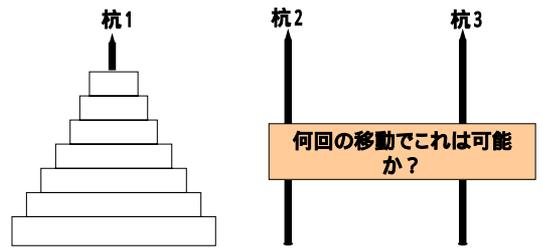
2つの問題とアルゴリズム

1. ハノイの塔 (The tower of Hanoi) p. 175
2. クイックソート (quick sort) p. 186

ハノイの塔

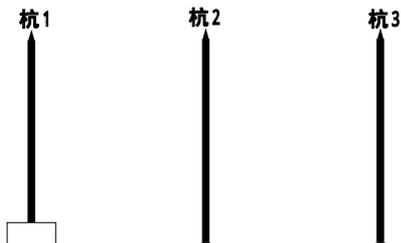


ハノイの塔



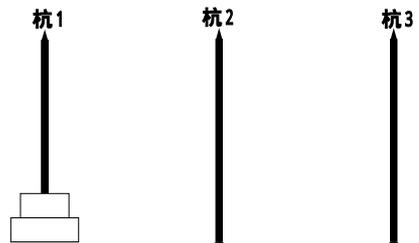
杭1にある円盤を、全て杭3に移動せよ。ただし、小さい円盤の上に大きい円盤を乗せてはいけない。さらに、一度に1枚の円盤しか動かしてはいけない。

ハノイの塔(円盤の数が1のとき)



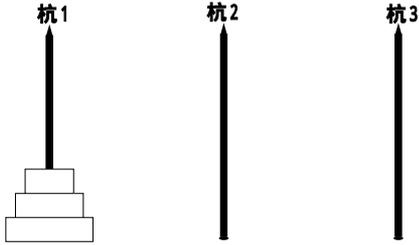
移動回数 = 1.

ハノイの塔(円盤の数が2の場合)



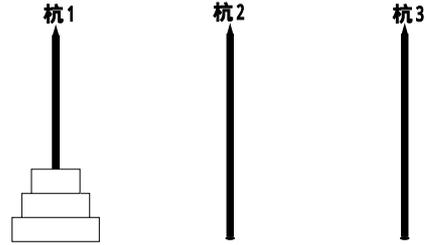
移動回数 = 3.

ハノイの塔(円盤の数が3の場合)



移動回数 = 7.

ハノイの塔(円盤が3の場合をもう一度)

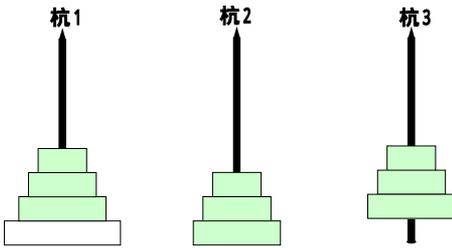


一番大きい円盤以外の円盤が杭1から杭2に移動.

移動回数 = 3 + 1 + 3.

一番大きい円盤を杭3に移動. あとは, 杭2にある2枚を杭3に移動すればよい!

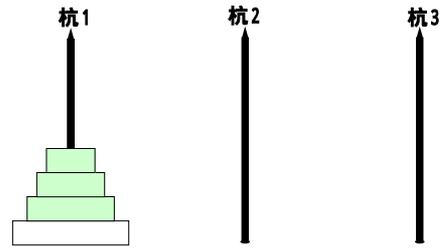
ハノイの塔(円盤の数が4の場合の戦略)



一番大きい円盤以外の円盤が杭1から杭2に移動.

一番大きい円盤を杭3に移動. あとは, 杭2にある3枚を杭3に移動する.

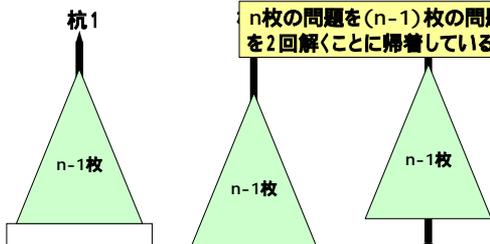
ハノイの塔(円盤の数が4の場合)



一番大きい円盤以外の円盤が杭1から杭2に移動.

一番大きい円盤を杭3に移動. あとは, 杭2にある3枚を杭3に移動する.

ハノイの塔(円盤の数がnの場合の戦略)

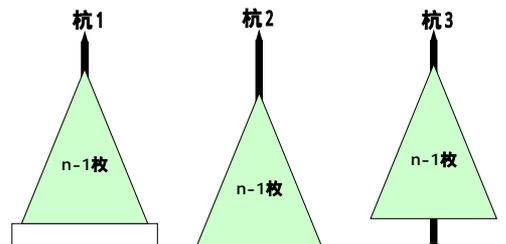


n枚の問題を(n-1)枚の問題を2回解くことに帰着している.

一番大きい円盤以外の円盤が杭1から杭2に移動.

一番大きい円盤を杭3に移動. あとは, 杭2にある(n-1)枚を杭3に移動する.

移動回数の算出



T_n = 円盤の数がnのときの移動回数

$$T_n = T_{n-1} + 1 + T_{n-1} = 2T_{n-1} + 1$$

漸化式 $T_n = 2T_{n-1} + 1$

n	1	2	3	4	5	...	n
T_n	1	3	7	15	31	...	?

$$T_n = 2^n - 1?$$

$T_n = 2^n - 1$ の帰納法による証明

$n = 1$ のとき, $T_1 = 2^1 - 1 = 1$ だから正しい.
 $n = k$ のとき, $T_n = 2^n - 1$ が成り立つと仮定する.

$n = k+1$ のときを考えると,

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= 2T_k + 1 \\ &= 2(2^k - 1) + 1 \\ &= 2^{k+1} - 2 + 1 \\ &= 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

ゆえに, $n = k+1$ のときも, 成り立つ.

ソーティング

与えられた数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ を小さい順 (昇順) に並べ替えよ.

例) 2, 5, 7, 6, 3, 1, 4

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

ソーティングに対してどのようなアルゴリズムが考えられるだろうか?

素朴なアルゴリズム (選択ソート)

2	5	7	6	3	1	4
2	5	7	6	3	1	4
1	5	7	6	3	2	4
1	2	7	6	3	5	4
1	2	3	6	7	5	4
1	2	3	4	7	5	6
1	2	3	4	5	7	6
1	2	3	4	5	6	7

バブルソート

2	5	7	6	3	1	4
2	5	7	6	3	1	4
2	5	7	6	3	1	4
2	5	7	6	1	3	4
2	5	7	1	6	3	4
2	5	1	7	6	3	4
2	1	5	7	6	3	4
1	2	5	7	6	3	4

バブルソート (続き)

1	2	5	7	6	3	4
1	2	5	7	6	3	4
1	2	5	7	6	3	4
1	2	5	7	3	6	4
1	2	5	3	7	6	4
1	2	3	5	7	6	4
1	2	3	5	7	6	4

バブルソート(続き)

1	2	3	5	7	6	4
1	2	3	5	7	6	4
1	2	3	5	7	4	6
1	2	3	5	4	7	6
1	2	3	4	5	7	6
1	2	3	4	5	7	6

バブルソート(続き)

1	2	3	4	5	7	6
1	2	3	4	5	7	6
1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7

バブルソート(続き)

1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7

バブルソート(続き)

1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7

クイックソート(Lのソート)

2	5	7	6	3	1	4
2	5	7	6	3	1	4

クイックソート(D1のソート)

2	3	1				
2	3	1				

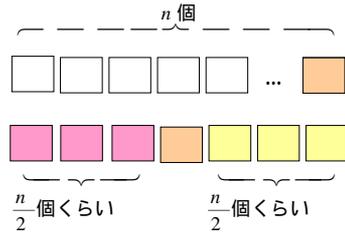
クイックソート(D2のソート)

□ □ □ □ 5 7 6

□ □ □ □ 5 7 6

□ □ □

計算時間の漸化式



$T_n = n$ 個の数をソートするためにかかる時間

$$T_n = 2T_{n/2} + n$$

$$T_n = 2 T_{n/2} + n$$

この漸化式を解くと

$$T_n \approx Cn \log n$$

を得る。(Cは定数.)

宿題

数列 10, 9, 6, 7, 8, 1, 2, 3, 4, 5 をクイックソートでソートせよ.